



Санкт-Петербургский
научный форум

НАУКА И ОБЩЕСТВО

Экономика и социология в XXI веке

18–22 октября • 2010 • Санкт-Петербург • Россия

Аскар Акаев

МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ В
ПРОГНОЗИРОВАНИИ ДОЛГОСРОЧНОГО
РАЗВИТИЯ ЭКОНОМИКИ

Московский Государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Аннотация

В настоящем докладе излагаются математические модели, описывающие долговременный тренд демографической, технологической и экономической динамики. Нелинейный характер модели демографической динамики с запаздываниями позволяет выявить бифуркационное разветвление сценариев развития в зависимости от степени разрешения экологических проблем как для мира в целом, так и отдельных стран. Динамика технического прогресса определяется с помощью моделей диффузии технологий извне и коммерциализации инноваций в сфере НИОКР самой страны. Использование предлагаемых моделей демографической и технологической динамики в эндогенной модели экономического роста позволяет с приемлемой точностью рассчитывать динамику экономического развития в долгосрочном периоде. Результаты численного моделирования иллюстрируются на примерах расчета демографической и экономической динамики как для мира в целом, так и авангардных стран XXI века: США, Китая, Индии, Японии и Германии. Предложена также модель экономической динамики со встроенным нелинейным акселератором инвестиций, описывающая влияние циклических колебаний на долговременный экономический рост. Модель позволяет выявить точки бифуркации, диапазон изменения структурных параметров экономической системы, обеспечивающих устойчивое развитие в условиях неравновесия, а также периоды кризисной рецессии. Модель верифицируется на примере США и используется для прогнозирования экономического развития США в 2018-2050 гг.

Содержание

Введение.....	1
1. Модель экономического роста Мэнкью-Ромера-Уэйла и ее эндогенизация.....	4
2. Модели демографической динамики	
2.1. Основные уравнения.....	5
2.2. Калибровка модели. Различные сценарии мировой демографической динамики.....	6
2.3. Примеры расчета долговременного прогноза динамики численности населения различных стран мира.....	7
3. Расчет динамики технического прогресса.....	9
4. Примеры расчета динамики ВВП для развитых и развивающихся стран мира.....	11
5. Вывод общего уравнения макроэкономической динамики, описывающего совместное взаимодействие долговременного роста и деловых циклов.....	21
6. Верификация уравнения макроэкономической динамики и долгосрочное прогнозирование на примере США.....	32
Выводы.....	36
Список литературы.....	39

МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ В ПРОГНОЗИРОВАНИИ ДОЛГОСРОЧНОГО РАЗВИТИЯ ЭКОНОМИКИ

профессор А.А. Акаев
Иностранный член РАН

Введение

Капица С.П. разработал оригинальную феноменологическую теорию роста человечества (Капица, 2008), которая позволила не только объяснить, наблюдавшийся на протяжении всей истории человечества, гиперболический рост населения Земли, но также загадку глобального демографического перехода, начавшегося в середине прошлого века и продолжающегося поныне. Он показал, что глобальная демографическая динамика может быть описана следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{C}{(T_1 - t)^2 + \tau^2}, \quad (1)$$

где N – текущая численность населения; τ – параметр, характеризующий активный период жизни человека; T_1 – критический год для демографического перехода; C – константа.

Уравнение Капицы (1) имеет простое изящное решение, описывающее динамику роста численности населения Земли:

$$N = K^2 \operatorname{arcctg} \left(\frac{T_1 - t}{\tau} \right), \quad K^2 = \frac{C}{\tau}. \quad (2)$$

Формула Капицы (2) дает весьма хорошее приближение мировой демографической динамики в ретроспективе и особенно на стадии демографического перехода (Акаев, 2010).

Модель Капицы (2) дает также хорошее описание демографической динамики большинства развитых и отдельных развивающихся стран, способных обеспечить устойчивый эволюционный рост численности населения. Важным условием при этом является отсутствие принудительного ограничения рождаемости и существенного влияния миграционных потоков на социально-экономические процессы. К таким странам относятся США, страны Западной Европы, Бразилия и многие другие.

Капица С. показал, что рост населения Земли можно описать математически, не вводя никаких дополнительных факторов, кроме самой численности населения (Капица, 1992). Это дало ему основание для провозглашения “демографического императива”, признания первостепенной и самодостаточной роли демографии в истории развития человеческого общества. Более того, он справедливо утверждает, что демографическая динамика играет первостепенную и решающую роль в истории развития человеческого общества. Таким образом, следует полагать, что геополитические, экономические и

культурные процессы, происходящие в мире, подстраиваются к динамике изменения численности населения.

Капица С. также полагает, что происходящий глобальный демографический переход (1960–2040 гг.) сродни фазовому переходу в физике – это переход на новый режим развития, отличный от прежнего. Вследствие этого будет происходить явление бифуркации, вызывающее разветвление сценария демографического развития. Наряду с устойчивым ростом со стабилизацией, описываемым моделью Капицы (2), наиболее вероятными представляются “режимы роста с возвратом”: а) сценарий роста с аperiodическим возвратом и стабилизацией на стационарном уровне; б) сценарий роста с затухающим колебательным возвратом на стационарный уровень. Следовательно, демографический переход, сопровождаемый резкими изменениями скорости роста численности населения, должен привести к весьма значительным изменениям в геополитическом и экономическом развитии человечества. Все это и является предметом исследования настоящей работы.

Рассмотрим, прежде всего, последствия демографического перехода на экономическое развитие. В основе всех современных моделей экономического роста лежит неоклассическая модель роста, предложенная Нобелевским лауреатом по экономике Робертом Солоу (Solow, 1956):

$$Y(t) = A(t)K^\alpha(t)L^{1-\alpha}(t), \quad (3)$$

где $Y(t)$ – текущий объем выпуска национальной продукции (ВВП); $K(t)$ – текущий объем физического капитала; $L(t)$ – численность занятых в экономике (труд); $A(t)$ – технический прогресс (уровень развития технологий).

Солоу Р., при анализе экономического роста в США и других индустриально развитых странах на основе разработанной им модели (3), исходил из предположения о постоянстве темпов роста населения (соответственно – рабочей силы) т. е. экспоненциального роста населения:

$$\frac{dL}{Ldt} = n = \text{const}; \quad L = L_0 \exp(nt). \quad (4)$$

Данное предположение было справедливым с приемлемой точностью на продолжительных этапах всей индустриальной эпохи вплоть до 1980-х годов, когда имел место гиперболический рост населения Земли (Капица, 2008). Поэтому оно стало общепринятым в моделях долгосрочного прогнозирования экономического роста (Столеру, 1974). Поскольку демографический переход вызвал к жизни различные сценарии демографического развития и условие (4) уже не соблюдается, при разработке прогностических моделей для XXI века необходимо учитывать реальные темпы роста населения в соответствии с возможными сценариями демографического развития.

Ключевую роль в модели экономического роста Солоу (3) играет фактор технического прогресса $A(t)$, который по существу представляет собой совокупную факторную производительность. Лауреат Нобелевской премии Ян Тинберген, в своих расчетах по прогнозированию экономического роста в

различных странах, широко использовал производственную функцию следующего вида (Тинбэрхэн, Бос, 1967):

$$Y = ae^{\gamma t} K^\alpha L^{1-\alpha}, \quad a = \text{const}, \quad (5)$$

где γ – темпы технического прогресса. Таким образом, Я. Тинберген предполагал, что технический прогресс развивается с постоянным темпом роста, что также с приемлемой точностью было справедливо на разных этапах для большей части XX-го столетия. Но уже с конца прошлого века стало наблюдаться заметное замедление темпов технического прогресса и углубление его циклических колебаний. Вследствие этого также перестало выполняться предположение о постоянстве темпов технического прогресса.

Можно показать, что оба предположения имеют одну и ту же природу и вытекают из одного источника – режима демографической динамики. Действительно, Капица С. показал, что на стадии гиперболического роста глобальная демографическая динамика удовлетворяла уравнению (Капица, 2008):

$$\frac{dN}{Ndt} = rN, \quad r = \text{const}. \quad (6)$$

С другой стороны, Кремер М. (Kremer, 1993) установил, следуя утверждению Нобелевского лауреата Саймона Кузнеца, что большее население вызывает больший технический прогресс, пропорциональность темпов роста технологий размеру населения:

$$\frac{dA}{Adt} = bN, \quad b = \text{const}. \quad (7)$$

Эмпирическая проверка уравнения Кузнеца–Кремера (7), проведенная в работе (Коротаев, Малков, Халтурина, 2007), показала, что она справедлива только на стадии гиперболического роста человечества. Из уравнений (6) и (7) следует тождество:

$$\frac{dA}{Adt} = \frac{b}{r} \frac{dN}{Ndt}. \quad (8)$$

Отсюда непосредственно видно, что если справедливо допущение о постоянстве темпов роста населения, тогда автоматически выполняется и допущение о постоянстве темпов технологического роста. Из тождества (8) следует, что

$$A = A_0 N^{1+\delta}, \quad (9)$$

причем, $\delta = \frac{b-r}{\gamma}$.

Таким образом, на стадии гиперболического роста, технический прогресс зависел исключительно от численности населения (9), т. е. строго подчинялся демографическому императиву.

Еще раз подчеркнем, что допущения о постоянстве темпов роста численности населения (4), а также темпов технического прогресса (5) были справедливы на стадии гиперболического роста населения Земли вплоть до

1980-х годов. В ходе демографического перехода они перестали выполняться. Вместе с тем, эти устаревшие допущения все еще можно встретить в современных моделях долгосрочного экономического роста, а также в большинстве современных учебников по макроэкономической динамике (Шараев, 2006; Прасолов, 2008).

В настоящей работе мы предлагаем математические модели для долгосрочного прогнозирования экономического развития, которые учитывают реальные темпы роста как населения, так и технологий. Причем, мы исходим исключительно из демографического императива, основываясь на демографической динамике, связанной с наиболее вероятными сценариями демографического развития.

1. Модель экономического роста Мэнкью–Ромера–Уэйла и ее эндогенизация

Неоклассическая модель экономического роста Р. Солоу (3), описанная во введении, наиболее подходит для описания экономического развития индустриально развитых стран, где ключевую роль играет физический капитал и, в особенности, высокая капиталовооруженность труда. Однако в последние десятилетия все более возрастающую роль в экономическом развитии играет человеческий капитал. Именно человеческий капитал становится ведущим фактором производства. Поэтому последние десятилетия характеризуются стремительным ростом инвестиций в человека. Таким образом, возникла необходимость учета человеческого капитала в производственной функции наряду с традиционными факторами производства как физический капитал, труд и природные ресурсы. Наиболее простым способом, путем введения человеческого капитала в базовую модель роста Солоу, это сделали Мэнкью Г., Ромер Д., Уэйл Д., предложив следующую модель роста с техническим прогрессом нейтральным по Харроду (Mankiw, Romer, Weil, 1992):

$$Y(t) = K^\alpha(t)H^\beta(t)[A(t)L(t)]^{1-\alpha-\beta}, \quad (10)$$

где $H(t)$ – человеческий капитал; $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < 1$. В этой модели человеческий капитал выступает как производственный фактор, и процесс его накопления принимается аналогичным для физического капитала. Верификация модели (10), проведенная авторами на основе весьма обширных эмпирических данных для более чем 120 стран мира, показала, что она весьма удовлетворительно описывает динамику экономического роста как в развитых, так и в развивающихся странах, а также различия в характере роста развивающихся и развитых стран. Модель Мэнкью–Ромера–Уэйла остается экзогенной и также как модель Солоу зависит от внешнего технического прогресса.

В работе (Акаев, 2010) была предложена схема эндогенизации модели (10), использующая эмпирический закон Калдора (Kaldor, 1961), которая сохраняет свою силу в современную эпоху и в соответствии с которым можно принять:

$$K = c_K Y; \quad H = c_H Y; \quad c_K, c_H - \text{константы.} \quad (11)$$

Предполагается также, что численность занятых в экономике L связана с общей численностью населения N следующим образом:

$$L = c_L N, \quad c_L = \text{const.} \quad (12)$$

Подстановка (11) и (12) в модель Мэнкью–Ромера–Уэйла (10) приводит к приближенной формуле для расчета ВВП:

$$Y = \gamma AN, \quad \gamma = c_L c_K^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} c_H^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}. \quad (13)$$

Эта формула хороша тем, что она зависит только от численности населения, поскольку технический прогресс A также определяется численностью населения (7). Следовательно, экономический рост определяется демографическим императивом. Таким образом, численность населения N играет ключевую роль в долгосрочном экономическом росте.

2. Модели демографической динамики

2.1. Основные уравнения

Во введении уже отмечалось, что динамика численности населения тех стран, которые способны обеспечить устойчивое эволюционное развитие, хорошо описывается моделью Капицы (2). Однако таких стран в современном мире насчитывается не так много. Для большинства стран мира, а также для мира в целом наиболее вероятным сценарием демографического развития является ”режим роста с возвратом”, согласно которому население растёт и по инерции проскакивает допустимый предел, достигает некоторого максимального значения, а затем плавно падает до стационарного уровня или стабилизируется на нем путем затухающих колебаний. Для описания динамики численности населения по данному сценарию демографического развития наиболее подходит модель, предложенная в работе (Акаев, Садовничий, 2010), которая основывается на нелинейном дифференциальном уравнении демографической динамики с тремя запаздываниями:

$$\frac{dN}{dt} = rN^2(t - \tau_1) \left\{ 1 - \frac{N(t)}{K(N, \tau_2, \tau_3)} \right\}, \quad (14)$$

где выражение для мгновенной емкости среды обитания $K(N, \tau_2, \tau_3)$ учитывает уровень технологического развития:

$$K(N, \tau_2, \tau_3) = N_C + \gamma [N(t - \tau_2) - N_0] \exp\{-\kappa [N(t - \tau_3) - N_0]\}. \quad (15)$$

Здесь, τ_1 – среднее время наступления репродуктивной способности; τ_2 – время диффузии базисных технологий; τ_3 – запаздывание реакции биосферы на антропогенную нагрузку. Среднее время наступления репродуктивной способности составляет 25 лет. Продолжительность диффузии технологий в

современную эпоху составляет 25–30 лет. Время запаздывания реакции биосферы на антропогенную нагрузку не превышает 100 лет.

2.2. Калибровка модели.

Различные сценарии мировой демографической динамики.

Подбор параметров $r, \kappa, \gamma, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ нелинейного дифференциального уравнения демографической динамики с тремя запаздываниями (14), (15) производился численно методом наименьших квадратов по имеющимся данным по численности населения мира и рассматриваемых стран (t_k, N_k) . Исследования показали, что целевая функция метода наименьших квадратов

$$\Phi(r, \kappa, \gamma, \tau_1, \tau_2, \tau_3) = \sum_k (N_k - N(t_k; r, \kappa, \gamma, \tau_1, \tau_2, \tau_3))^2, \quad (16)$$

где $N(t_k; r, \kappa, \gamma, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ — решение (14), (15), имеет достаточно много локальных минимумов, поэтому в шестимерном пространстве параметров $(r, \kappa, \gamma, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ выбирался гиперкуб

$$(r, \kappa, \gamma, \tau_1, \tau_2, \tau_3) \in [0, r_{\max}] \times [0, \kappa_{\max}] \times [0, \gamma_{\max}] \times [0, \tau_{1, \max}] \times [0, \tau_{2, \max}] \times [0, \tau_{3, \max}] \quad (17),$$

который разбивался сеткой узлов с постоянным шагом по каждому из направлений, соответственно: $\Delta r, \Delta \kappa, \Delta \gamma, \Delta \tau_1, \Delta \tau_2, \Delta \tau_3$ (выбиралось 5-10 разбиений). В каждом узле сетки численно решалось дифференциальное уравнение (14), (15) для $T > t_0 = 1950$ и вычислялась целевая функция метода наименьших квадратов (16). Далее отбиралось несколько узлов с наименьшим значением (16), после чего в окрестности $(\pm \Delta r, \pm \Delta \kappa, \pm \Delta \gamma, \pm \Delta \tau_1, \pm \Delta \tau_2, \pm \Delta \tau_3)$ данных узлов выбиралась сетка с более мелким шагом, на которой снова находился минимум (16). Данная процедура повторялась несколько раз, после чего полученные значения r, κ, γ брались в качестве начальных в методе наименьших квадратов. После минимизации (16) с данными наборами начальных значений параметров, выбиралось наименьшее значение (16), а соответствующий набор параметров полагался оптимальным.

При численном решении дифференциального уравнения (14), (15) требуется задание предыстории $N_h(T)$ не более чем за 100 лет, поскольку предполагается, что запаздывание реакции биосферы на антропогенную нагрузку не превышает 100 лет. Поскольку уравнение (14), (15) решалось численно, то предыстория $N_h(T)$ для $T < t_0$ была получена при помощи интерполяции данных о численности населения, которые брались из базы GGDC.

Два сценария динамики численности населения мира, полученные по модели с запаздыванием (14), (15), и их сопоставление с моделью Капицы (2) приведены на рис.1, где маркерами обозначены реальные данные (GGDC). Первому сценарию соответствует следующий набор параметров: $r = 0.0257, \gamma = 1.623, \kappa = 0.566, \tau_1 = 25, \tau_2 = 30, \tau_3 = 100$, а второму — $r = 0.0242, \gamma = 1.978, \kappa = 1.357, \tau_1 = 25, \tau_2 = 30, \tau_3 = 100$. Обоим сценариям отвечают

решения (14), (15), отклоняющиеся от реальных данных на промежутке с 1950г по настоящее время в пределах ошибки в данных по численности населения 3-5%. Первый сценарий прогнозирует максимальную численность населения 9 млрд. чел. в 2050г с последующим спадом, имеющим выраженный колебательный характер, до 5.2 млрд. чел. Второй сценарий дает несколько меньшую максимальную численность населения, порядка 7.7 млрд. в 2030г, со стабилизацией на уровне 5.2 млрд. чел. к 2100г.

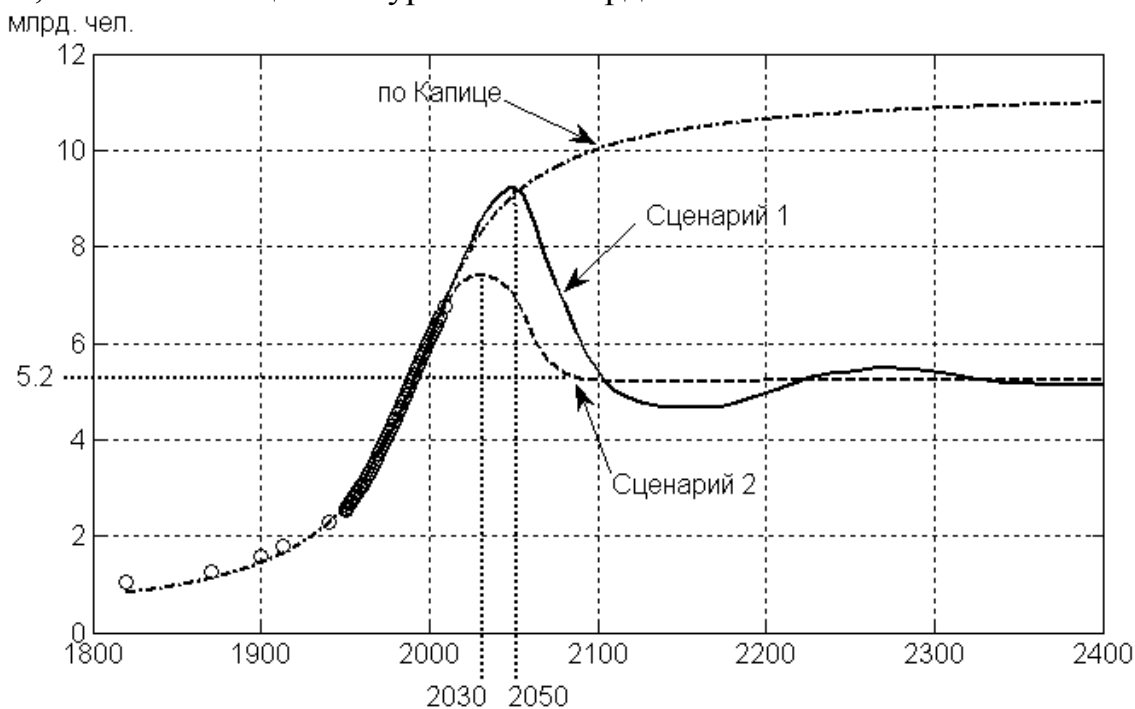


Рисунок 1. Динамика численности населения мира

Необходимо отметить, что вопрос о допустимой численности населения Земли или отдельной страны как стационарного уровня является одним из центральных при расчетах долговременного прогноза демографической динамики. На сегодня отсутствуют надежные методы оценки допустимой стационарной численности населения мира как для мира в целом, так и для отдельных стран. Мы в своих прогнозных расчетах берем $N_C = 5,2$ млрд. чел., стационарный уровень, встречающийся в прогнозных исследованиях последних лет (Акимов, 2008; Долгоносков, 2009). Стационарная численность населения отдельной страны приближенно может быть найдена путем деления стационарной численности населения мира на индекс антропогенной нагрузки интересующей страны, для которого имеются специальные таблицы (Федотов, 2002). Например, если для мира в целом, взять $N_C = 5,2$ млрд. чел., то для Китая — $N_{CK} = 1,2$ млрд.чел., для Индии $N_{СИ} = 0,98$ млрд.чел., а для Японии — $N_{СЯ} = 120$ млн.чел.

2.3. Примеры расчета долговременного прогноза динамики численности населения различных стран мира

Следует отметить, что имеется острая необходимость в разработке надежных методов оценки допустимой для интересующей страны стационарной численности населения. Здесь мы воспользуемся приведенными в параграфе 2.2 данными. На рис.2 представлены прогнозные траектории динамики численности населения Китая и Индии. Как видно из рассмотрения рисунка, благодаря введению жесткого механизма контроля рождаемости, в Китае демографическая динамика представляет собой плавную траекторию роста с апериодическим возвратом на стационарный уровень. А вот Индия, если там не будут предприняты аналогичные меры, скорее всего, столкнется с масштабным экологическим кризисом. Вследствие этого начнется резкая убыль населения, численность которого впоследствии стабилизируется с большими издержками в затухающем колебательном режиме. Таким образом, основные проблемы, связанные с последствиями демографического перехода в развивающихся странах, ожидают человечество ближе к середине XXI века.

В обоих случаях мы наблюдаем прекрасное совпадение расчетных значений численности населения с фактическими данными в ретроспективе вплоть до 2010г. Причем максимальное отклонение не превышает 70 млн. чел., а среднеквадратическое не превышает 30 млн. чел.

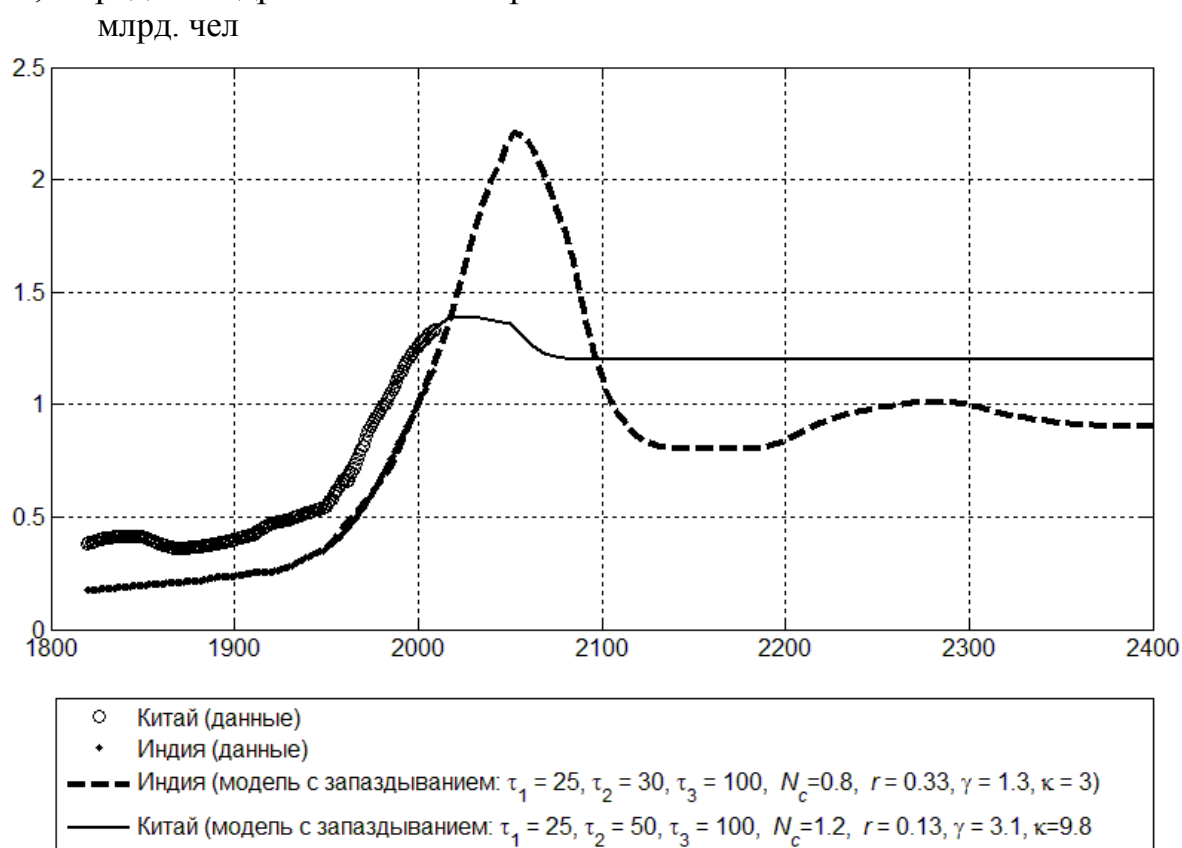


Рисунок 2. Прогноз численности населения Китая и Индии в XXI-XXII веках

На рис. 3 представлены различные сценарии развития демографической динамики для Японии, страны, которая, безусловно, способна обеспечить

устойчивое развитие, однако из-за территориальной стесненности вряд ли будет развиваться по модели Капицы. Более вероятные сценарии для Японии – это, скорее всего, рост с возвратом и со стабилизацией населения на стационарном уровне в 120млн. чел., начиная с 2050г. Этот сценарий более других соответствует и ретроспективным данным, в особенности фактической демографической динамике последних десятилетий. Причем максимальное отклонение не превышает 3 млн. чел., а среднеквадратическое не превышает 2 млн. чел.

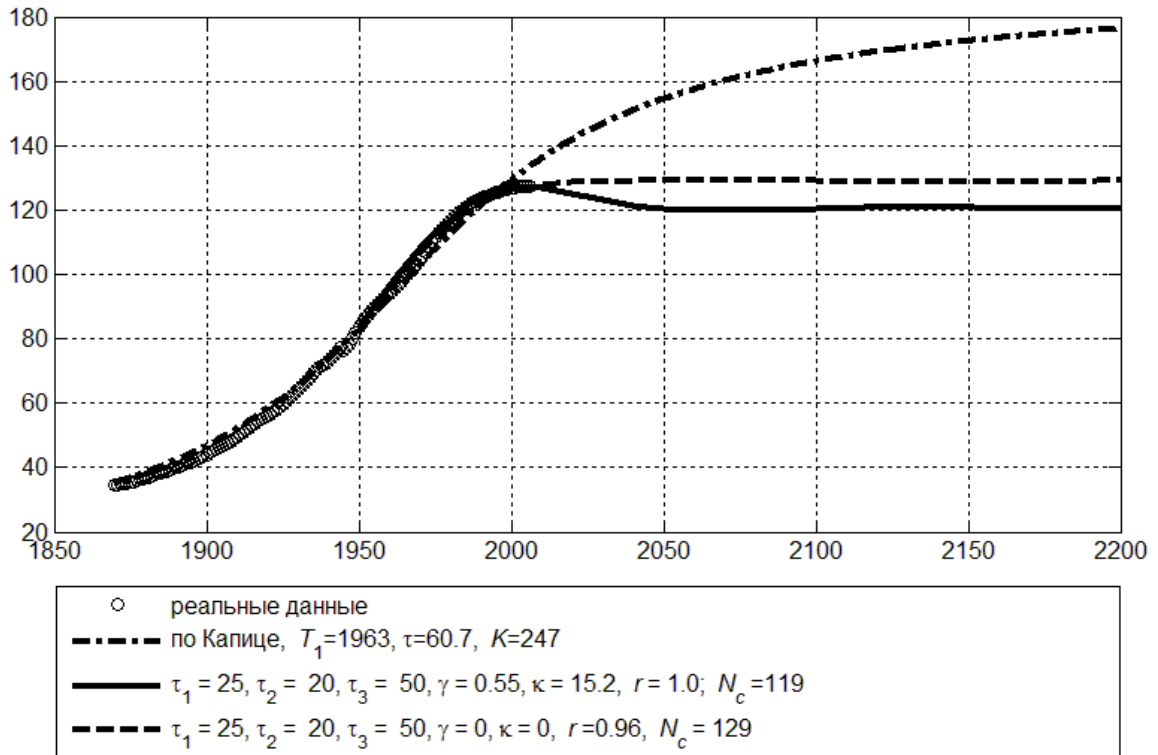


Рисунок 3. Прогнозная динамика численности населения Японии (млн. чел.) в XXI веке

3. Расчет динамики технического прогресса

Во введении было отмечено, что уравнение Кузнецца–Кремера (7), описывающее технологический рост (технический прогресс) справедливо только на этапе, предшествующем демографическому переходу. Чарльз Джонс показал, что в современных условиях вместо уравнения Кузнецца–Кремера целесообразно использовать так называемое “НИОКР–уравнение” (Jones, 1995):

$$\frac{dA}{Adt} = a \frac{L_A}{L} = a l_A, \quad (18)$$

где L_A – численность ученых, инженеров и технических работников, занятых в НИОКР; L – общая численность рабочих, занятых в экономике; l_A – доля занятых в НИОКР в общей численности рабочих; a – постоянный коэффициент. Однако сам Ч. Джонс обнаружил, что и это уравнение неудовлетворительно, поскольку для США, например, в последние 50 лет эта доля по-

стоянно нарастала, хотя средние темпы повышения совокупной факторной производительности оставались относительно постоянными и даже снизились в последнее время. Поэтому Ч. Джонс высказал пожелание, что было бы желательно найти способ сохранить базовую структуру предлагаемого им НИОКР – уравнения (18), исключив влияние эффекта масштаба, что не наблюдается на практике.

Можно показать, что указанным требованиям отвечает уравнение:

$$\frac{d}{dl_A} \left(\frac{dA}{Adt} \right) = al_A(l_M - l_A), \quad (19)$$

где l_M – величина доли занятых в НИОКР в режиме насыщения. Данное уравнение учитывает универсальный принцип убывающей отдачи от масштаба:

$$\frac{d}{dl_A} \left(\frac{dA}{Adt} \right) \rightarrow 0, \quad \text{при } l_A \rightarrow l_M.$$

Уравнение (19), описывающее динамику технического прогресса (или совокупной факторной производительности) через долю занятых в сфере НИОКР, является довольно простым и практичным и может быть использовано для прогнозных расчетов, поскольку статистические данные по численности занятых в НИОКР широко доступны (World Bank, 2010).

Уравнение (19) легко интегрируется и имеет решение:

$$q_A^0 = \frac{dA}{Adt} = q_{A0} + \frac{a}{6} \left\{ l_A^2 (3l_M - 2l_A) - l_{A0}^2 (3l_M - 2l_{A0}) \right\}. \quad (20)$$

Далее имеем:

$$A = A_0 \exp \left\{ \int_{T_0}^T q_A^0(t) dt \right\}. \quad (21)$$

Здесь и выше: T_0 – начальный момент отсчета времени; l_{A0} – доля занятых в НИОКР в начальный момент времени.

Что же касается l_A , то она лучше всего может быть аппроксимирована логистической функцией:

$$l_A(T - T_0) = l_{A0} \frac{1 + l_1}{1 + l_1 \exp[-\beta(T - T_0)]}, \quad (22)$$

где l_1, β – постоянные параметры и $l_{A0}(1 + l_1) = l_M$.

Уравнение (19) описывает технический прогресс, обусловленный процессом разработки и внедрения собственных технологических инноваций, за счет расширения сферы НИОКР, которая вызывает постепенное повышение доли занятых в НИОКР, описываемой восходящей логистической функцией (22). Однако, любая развивающаяся страна, в первую очередь, использует технологии уже освоенные в развитых авангардных в научно-техническом отношении странах. Причем, с ростом собственных технологических достижений, как правило, идет постепенное сворачивание процесса заимствования технологий извне. Как хорошо известно, процесс замещения технологий также описывается логистической функцией (Сахал, 1985). Поэтому техни-

ческий прогресс, обусловленный заимствованием технологий извне, можно описать нисходящей логистической функцией:

$$q_A^b = d_m \frac{d}{1 + d \exp[\vartheta(t - T_S)]}, \quad (23)$$

где d, ϑ, d_m – параметры логистической функции, причем, $(q_A^b)_{\max} = dd_m$; T_S – начальный момент времени, когда пошла масштабная диффузия заимствованных технологий.

Таким образом, в общем случае, темпы технического прогресса определяются вкладом как собственных технологий (20), так и заимствованных (22):

$$q_A = q_A^0 + q_A^b. \quad (24)$$

Верхние индексы в данном соотношении означают: “o” (own) – собственный; “b” (borrow) – заимствованный. Следовательно, формула (21) для вычисления динамики технического прогресса запишется в следующем виде:

$$A = A_0 \exp \left\{ \int_{T_0}^T (q_A^0 + q_A^b) dt \right\}. \quad (25)$$

Заметим, что для тех стран, где доля занятых в НИОКР достигла насыщения и $l_A \cong l_M$, естественно сразу принять $q_A^0 = q_{A0} = \text{const}$. Тогда из (21) следует следующая простая формула для расчета динамики технического прогресса:

$$A = A_0 \exp[q_{A0}(T - T_0)]. \quad (26)$$

Динамика технического прогресса для мира в целом вычисляется по

формуле:

$$A = A_0 \exp \left[b \int_{T_0}^T N(t) dt \right], \quad (27)$$

что предполагает справедливость уравнения Кузнецца-Кремера (7) на глобальном уровне.

4. Примеры расчета динамики ВВП для развитых и развивающихся стран мира

Имея математические модели для расчета демографической динамики (2) и (14)–(15), а также технологического роста (25)–(27), можно теперь приступить к расчету динамики ВВП по формуле (13).

Мировое ВВП, в соответствии с формулой (13) и выражением (9), справедливым для стадии гиперболического роста населения мира ($T < T_0$), определяется выражением:

$$Y(T) = \begin{cases} \varepsilon [N(T)]^{2+\delta}, & T < T_0; \\ \varepsilon [N_0]^{1+\delta} N(T) \cdot e^{a(1+\delta) \int_{T_0}^T N(t) dt}, & T > T_0. \end{cases} \quad (28)$$

Здесь параметры ε и δ определяются методом наименьших квадратов на основе фактических данных до момента $T_0=1970$ г. Параметр a затем находится методом наименьших квадратов с учетом данных с $T_0=1970$ г по настоящее время. Приближение данных до момента T_0 приведено на рис. 4.

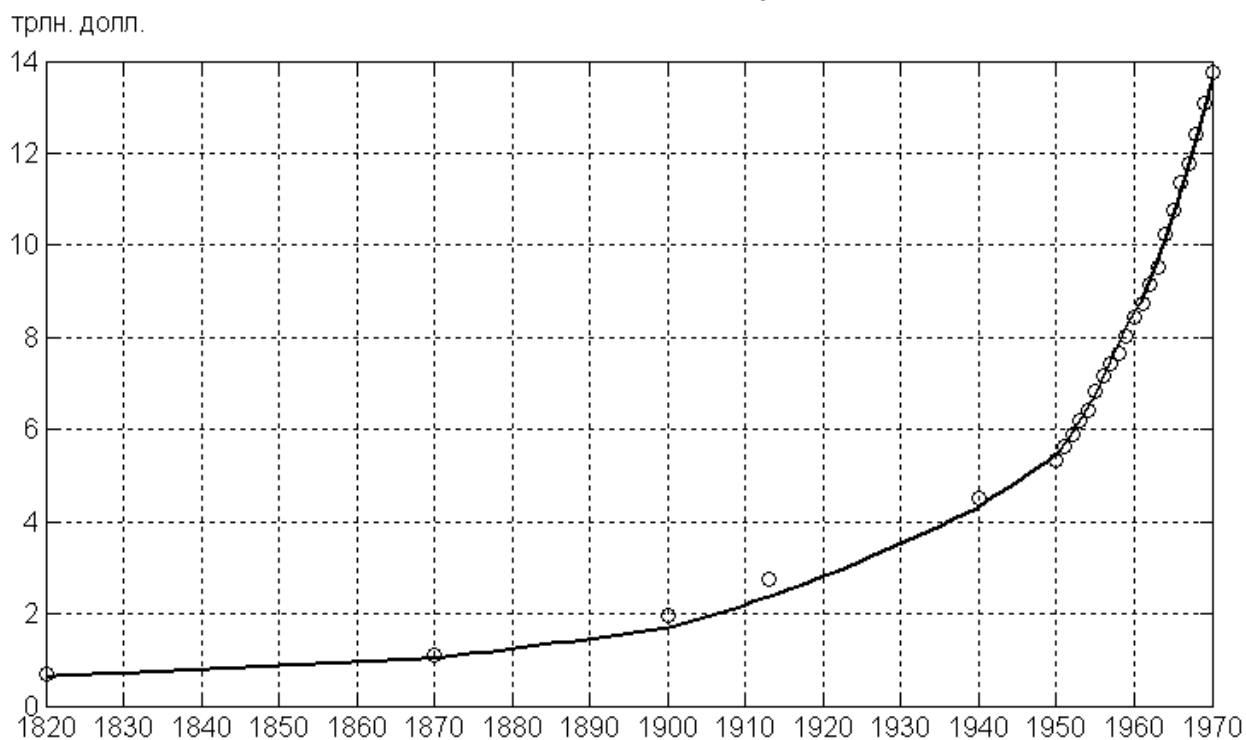


Рисунок 4. Приближение ВВП до 1970г, маркеры соответствуют реальным данным

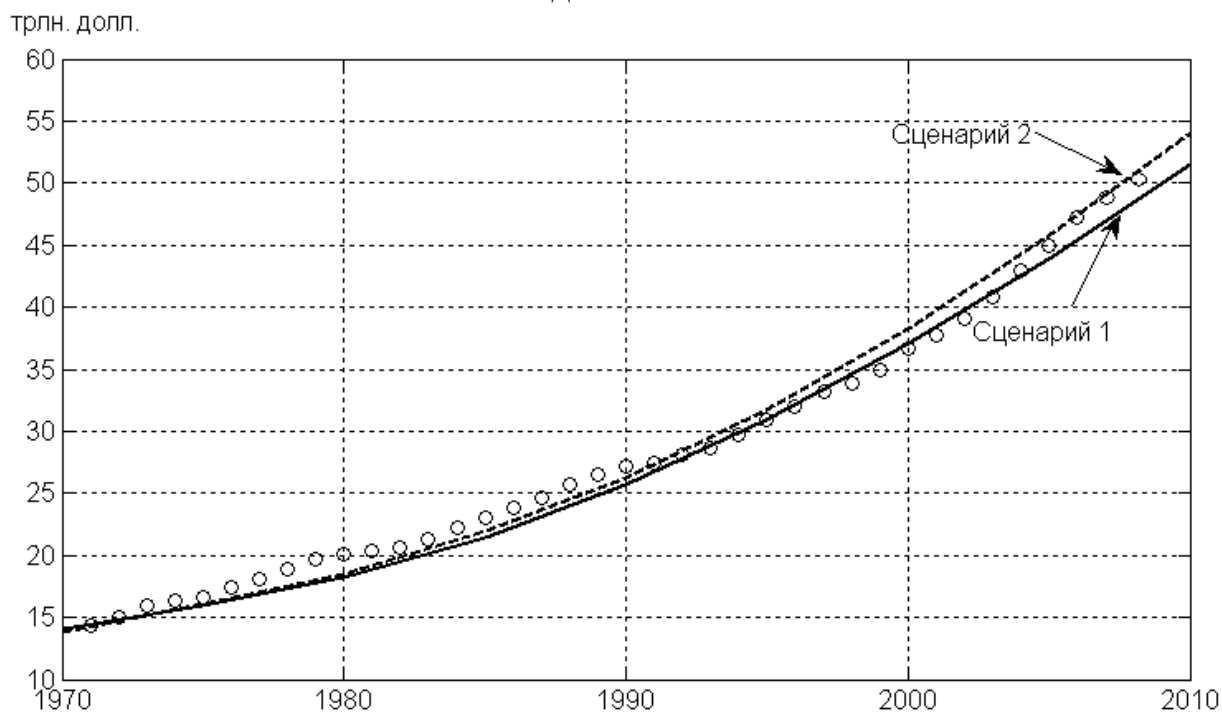


Рисунок 5. Приближение ВВП с 1970г по настоящее время, маркеры соответствуют реальным данным

Приближение данных на промежутке от T_0 до настоящего времени приведено на рис. 5. Оно получено уже по формулам (13) и (27). Графики свидетельствуют о достаточно хорошем приближении данных. При приближении по сценариям 1 и 2 максимальная ошибка не превосходит 2.2 трлн. долл., а среднеквадратическое уклонение — 0.6 трлн. долл. США.

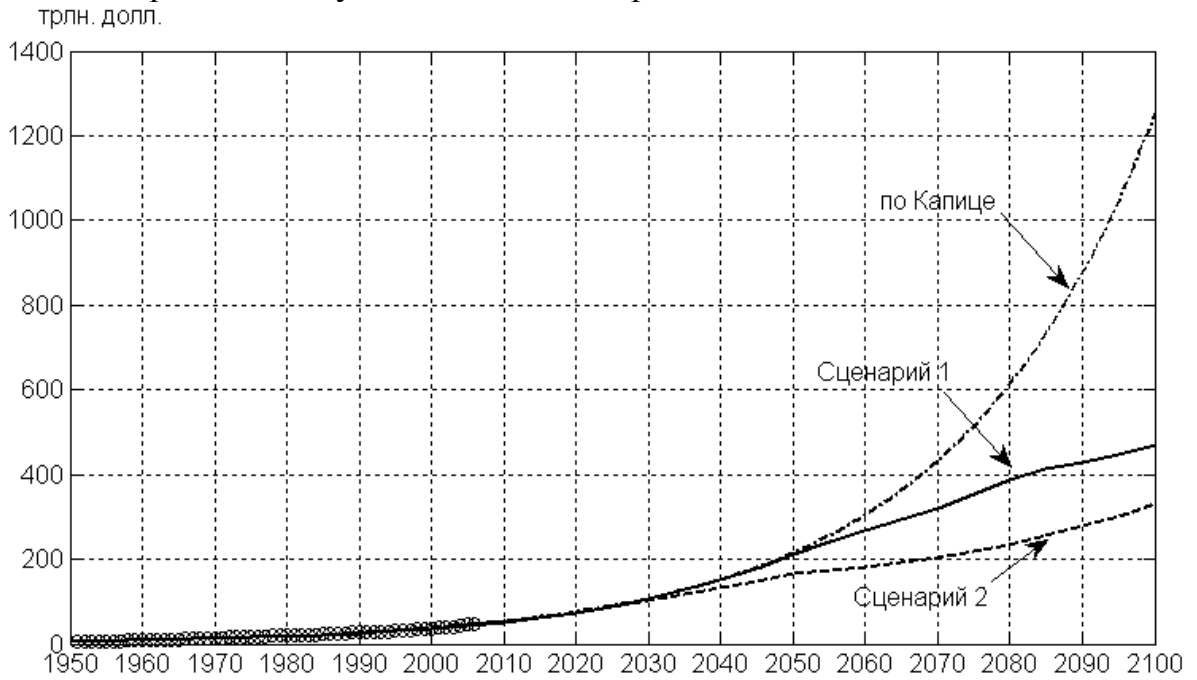


Рисунок 6. ВВП мира до 2100г (в постоянных ценах 1990г)

Результаты прогнозных расчетов ВВП мира до 2100 г. по формулам (13) и (27) приведены на рис. 6 для трех сценариев динамики населения: по Капице и сценариев 1-2 (см.рис. 1), реальные данные обозначены маркерами.

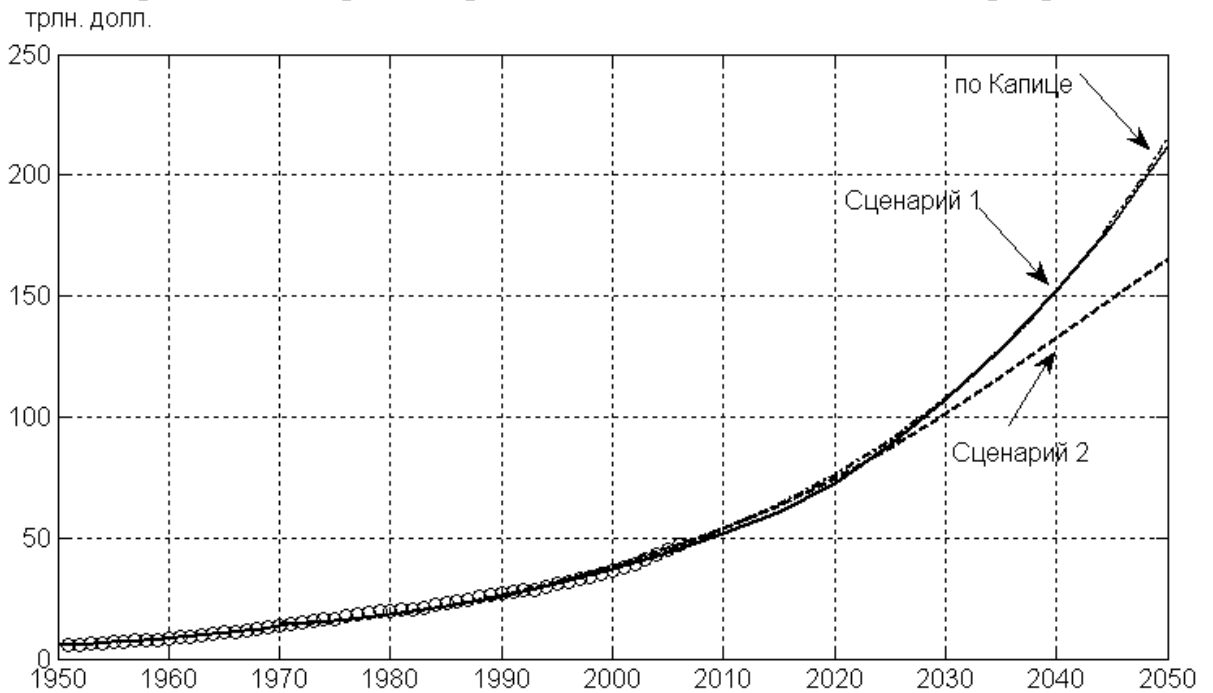


Рисунок 7. ВВП мира до 2050г (в постоянных ценах 1990г)

При реализации первого сценария к 2100г ВВП мира несколько превзойдет 470 трлн. долл., а при осуществлении второго — будет находиться на уровне 330 трлн. долл. Для большей наглядности, динамика мирового ВВП до 2050г приведена на рис. 7. По первому сценарию к 2050г ВВП составит 215 трлн. долл., а по второму — 170 трлн. долл.

Перейдем к расчету ВВП отдельных стран. Прежде всего, приведем способ построения логистических функций (22) и (23), входящих в модель технического прогресса.

Технический прогресс, обусловленный заимствованием технологий извне, описывается нисходящей логистической функцией (23). Параметры d_m, d, ϑ в (23) определяются из следующих условий. Задается q_s — стартовый уровень заимствования технологий в момент времени T_s , кроме этого задается время T_e , соответствующее практическому окончанию заимствования, именно предполагается, что интервал $[T_s, T_e]$ соответствует «жизненному циклу логисты», когда ее значения находятся в пределах 10-90% от асимптотического значения $q_{A,max}^b$. Данный подход проиллюстрирован на рис.8.

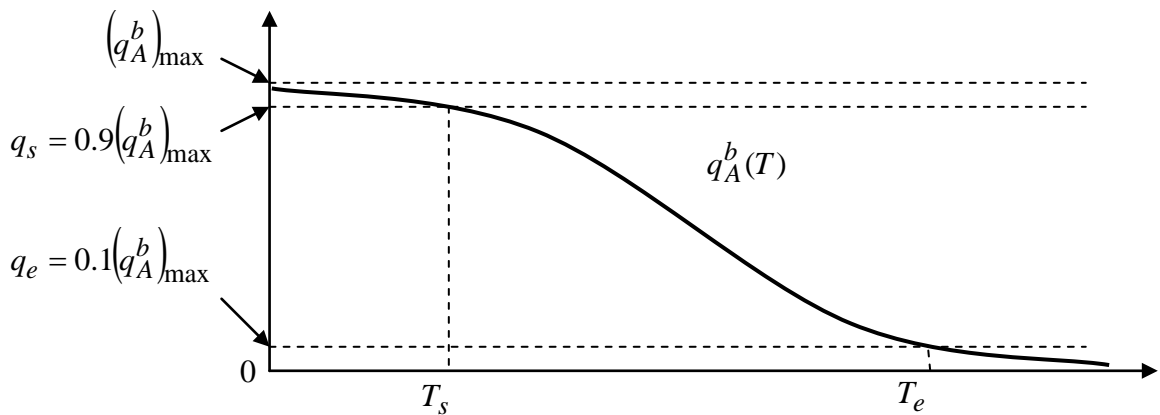


Рисунок 8. Нисходящая логистическая функция для прогноза динамики заимствования технологий

Предлагаемый способ нисходящей логистической функции приводит к следующим формулам для вычисления ее параметров d, d_m, ϑ :

$$\left(q_A^b\right)_{\max} = q_s / 0.9, \quad (29) \quad d = \frac{\left(q_A^b\right)_{\max}}{q_s} - 1, \quad (30)$$

$$d_m = \frac{\left(q_A^b\right)_{\max}}{d}, \quad (31) \quad \vartheta = \frac{1}{T_e - T_s} \ln\left(\frac{9}{d}\right). \quad (32)$$

Динамика доли занятых в НИОКР описывается логистической функцией (22), в которой подлежат определению параметры β, l_1, T_0 и l_{A0} . Если имеются достаточно полные данные $(t_k, l_{A,k})$ по доли занятых в НИОКР для

рассматриваемой страны (World Bank, 2010), то параметры β , l_1 , T_0 находятся по методу наименьших квадратов из условия

$$\min_{\beta, l_1, T_0} \sum_k (l_{A,k} - l_A(t_k - T_0))^2 \quad (33)$$

при ограничении на асимптотическое значение логисты

$$l_{A0}(1 + l_1) = l_M \quad (34)$$

При этом, значение l_M назначается из типичного значения для тех стран, доля занятых в НИОКР в которых практически достигла насыщения.

Если же достаточно полные данные по доле занятых в НИОКР (t_k , $l_{A,k}$) отсутствуют, то логистическая функция (22) строится способом, схожим с рассмотренным выше для нисходящей логистической функции, которая описывает заимствование технологий. Задается уровень насыщения l_M , далее считается, что в момент времени T_0 значение l_A должно составлять $0.1l_M$, а в некоторый момент времени T_e значение l_A должно составлять $0.9l_M$. Соответствующий график приведен на рис.9.

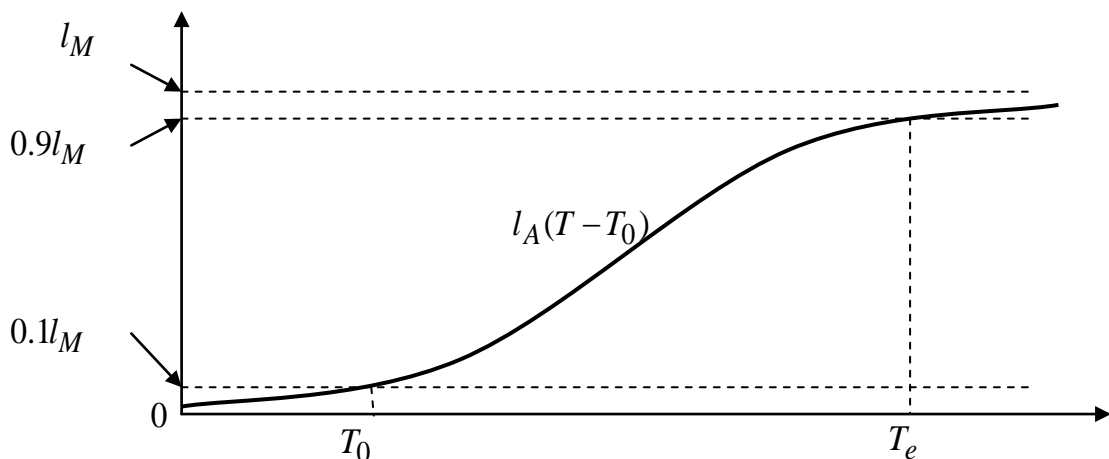


Рисунок 9. Построение логистической функции $l_A(T - T_0)$ для прогноза динамики доли занятых в НИОКР.

Перейдем к расчету динамики ВВП для развитых и развивающихся стран. Здесь прежде всего необходимо оценить темпы технического прогресса, обусловленные развитием устоявшихся общих технологий - q_{AO} . Его можно оценить двумя способами. Первый сводится к использованию формулы (9), описывающей совокупную факторную производительность q_{AO}^* вытекающей из уравнения Кузнец-Кремера (7) на стадии гиперболического роста населения мира. Величину q_{AO}^* можно оценить методом наименьших квадратов путем приближения экспоненциальной функцией движения совокупной факторной производительности (9):

$$N_0 \exp(q_{AO} t) \cong N^{1+\delta} = A/A_0, \quad (35)$$

выбирая в качестве временного интервала период стабильного развития каждой отдельно взятой страны. Второй способ заключается в оценке величины q_{AO}^* через темпы роста населения (8):

$$q_{AO}^* = \frac{dA}{A dt} = (1 + \delta) \frac{dN}{N dt} = (1 + \delta) q_N, \quad (36)$$

где q_N - темпы роста населения. Естественно, что берутся средние темпы роста населения за указанный период. Оба способа оценки для рассматриваемых в работе стран привели к практически одинаковым результатам. Так, для США значение q_{AO}^* составило 0,015; для Германии – 0,029; для Японии – 0,021; для Китая – 0,025 и для Индии – 0,014. Поскольку вклад знаний и технологий в совокупную факторную производительность q_{AO}^* составляет от 25 до 50% (Денисон, 1971), то можно записать:

$$q_{AO} = k_q q_{AO}^*.$$

Определив k_q для каждой страны, мы получили следующие значения q_{AO} : для США – 0,0095; для Германии – 0,011; Японии – 0,009; Китая – 0,0063; Индии – 0,007, которые мы используем в дальнейших расчетах.

Для США данные по доле населения, занятой в НИОКР (World Bank, 2010), и соответствующий прогноз до 2100г при помощи логистической функции (22) приведены на рис.10. Доля занятых в НИОКР стабилизируется на уровне 0.006 от общей численности населения.

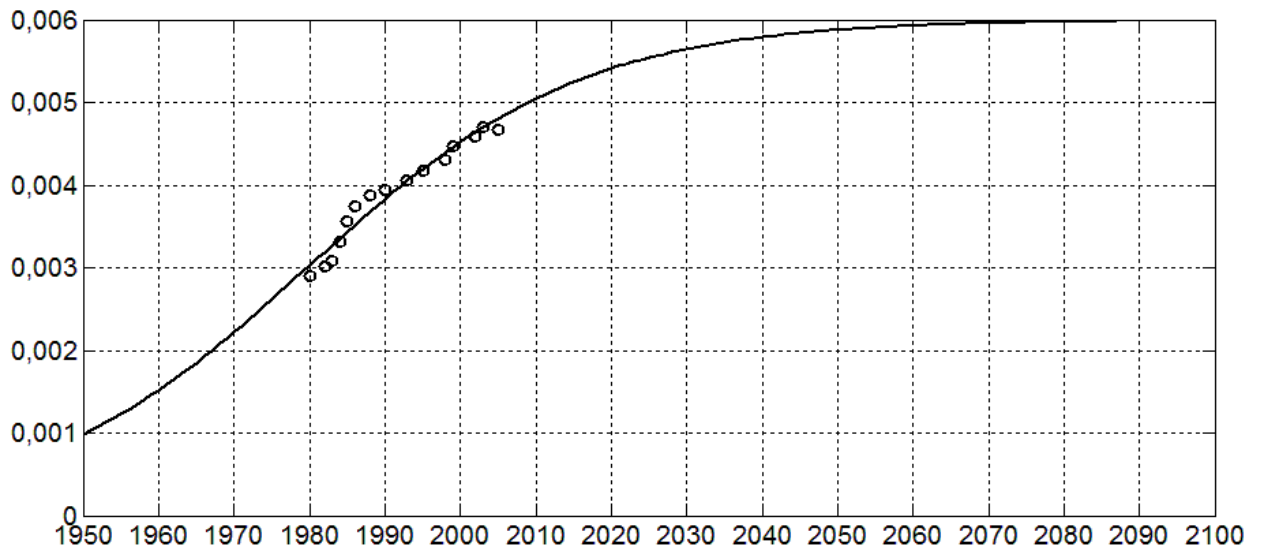


Рисунок 10. Данные по доле занятых в НИОКР для США (маркеры) и приближение логистической функцией l_A (сплошная линия)

На основе решения (20) уравнения (19), описывающего динамику технического прогресса, и построенной логистической функции l_A для США, найдем вклад собственных технологий в темпы технического прогресса q_A^0 .

Результат приведен на рис. 11 вместе с нисходящей логистической функцией, описывающей процесс вымывания заимствования технологий. Из рассмотрения графиков диффузии технологий на рис. 11 видно, что для США до Второй мировой войны заимствованные технологии играли большую роль нежели собственные. Но уже после войны, начиная с 1950-х годов США начинают генерировать мощную волну собственных технологических инноваций, которые уже активно заимствуют страны Западной Европы и Япония.

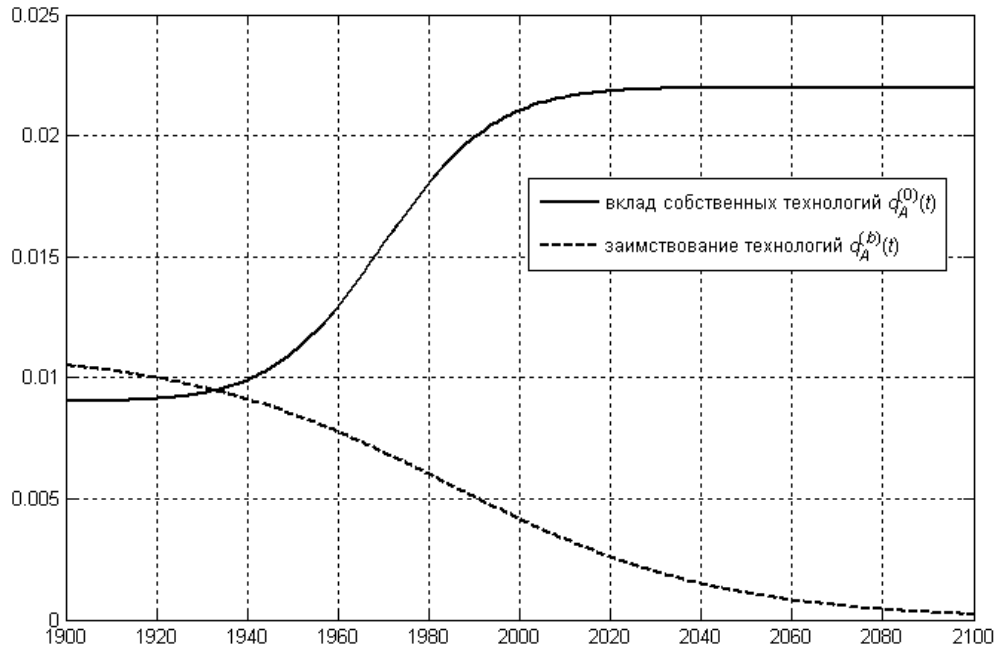


Рисунок 11. Темпы развития технологий в США

Полученные результаты по темпам технического прогресса США позволяют спрогнозировать динамику ВВП по формуле (13)-(25). Соответствующие результаты представлены на рис.12, причем расчет ВВП производился с 1870г и на графике видно хорошее совпадение расчета с реальными данными с 1870г по настоящее время.

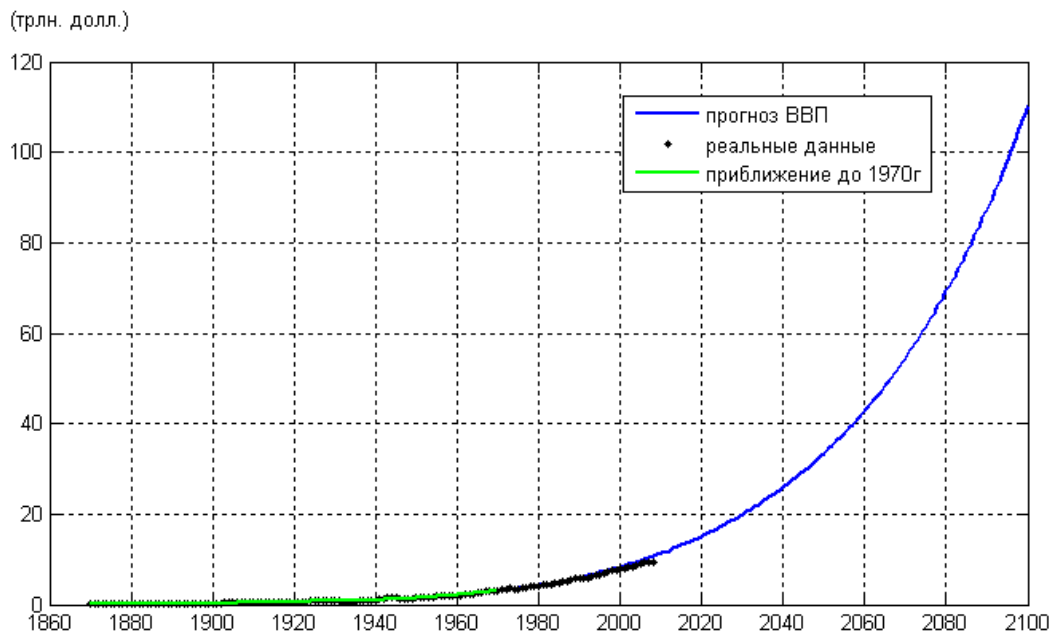


Рисунок 12. Ретроспективные данные (маркеры) и прогнозная динамика ВВП США

Результаты свидетельствуют о возможном трехкратном увеличении ВВП США к 2050г, когда ВВП достигнет 33,5 трлн. долл. (в постоянных ценах 1990г). Дальнейший рост ВВП приведет к его увеличению почти в 10 раз по сравнению с настоящим временем до значения 110,3 трлн. долл. к 2100 г.

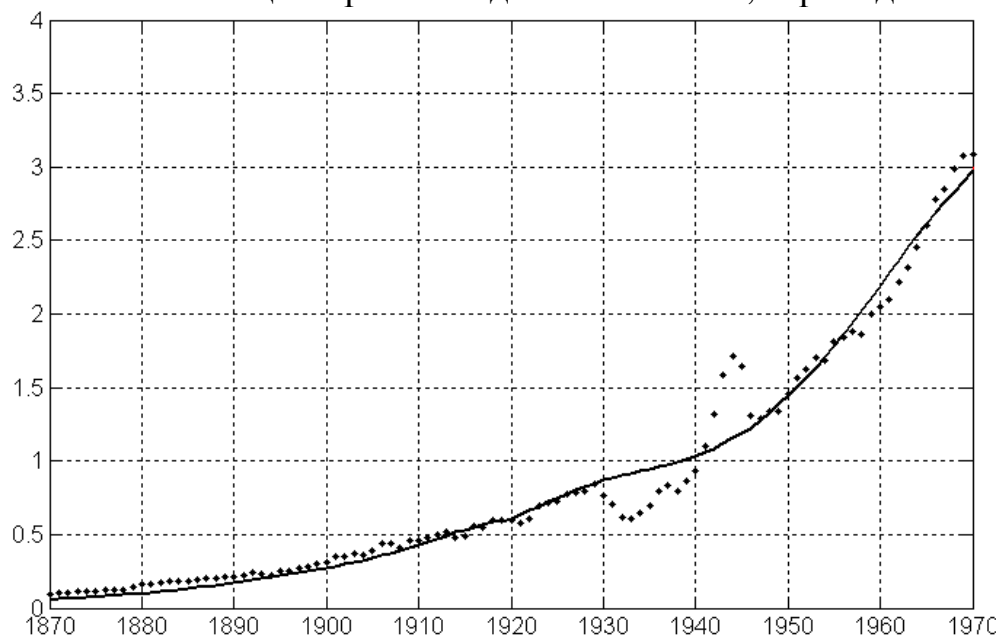


Рисунок 13. Приближение ВВП США моделью (9)-(13) с 1870г по 1970г (трлн. долл.)

Приведем более детально результаты приближения и прогноза ВВП. На рис.13 приводится график, иллюстрирующий приближение с 1870г по 1970г моделью (9)-(13), причем абсолютная максимальная ошибка приближения составляет 0.56 трлн. долл., а среднеквадратическое отклонение — 0.13 трлн. долл. Из графика видно, что наибольшая ошибка приходится на годы Великой депрессии и Второй мировой войны.

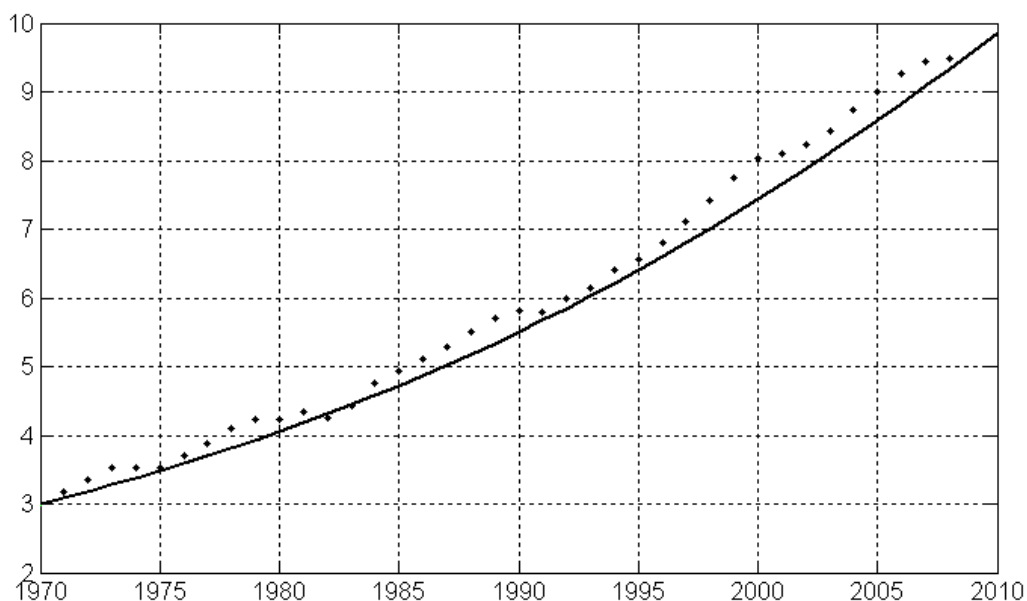


Рисунок 14. Приближение ВВП США моделью (13)-(25) с 1970г по настоящее время (трлн. долл.)

На рис.14 приведено приближение ВВП с 1970г по настоящее время моделью (13)-(25), причем абсолютная максимальная ошибка приближения составляет 0.6 трлн. долл., а среднеквадратическое отклонение — 0.14 трлн. долл.

Расчеты, аналогичные описанным выше для США, были проведены и для других развитых и развивающихся стран: Японии, Германии, Китая, Индии и ряда других стран. Причем ВВП указанных стран получены в пересчете на доллары США по паритету покупательной способности (ППС) в ценах 1990 г. Ниже, на рисунках 15 и 16, в качестве примеров приведены графики иллюстрирующие относительное влияние на темпы экономического роста как собственных технологических инноваций, так и заимствованных извне технологий для Японии и Китая.

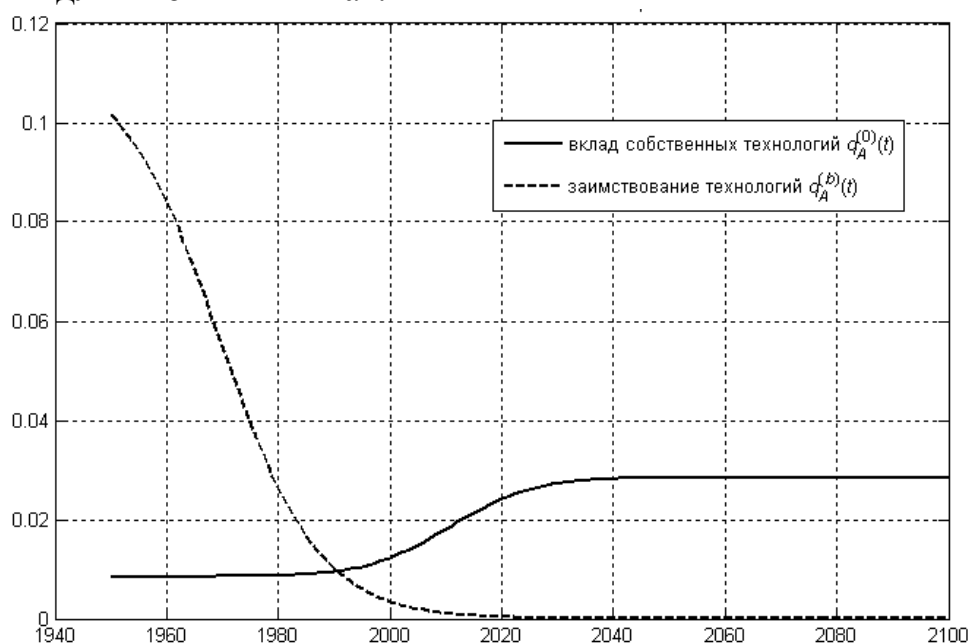


Рисунок 15. Темпы развития технологий в Японии

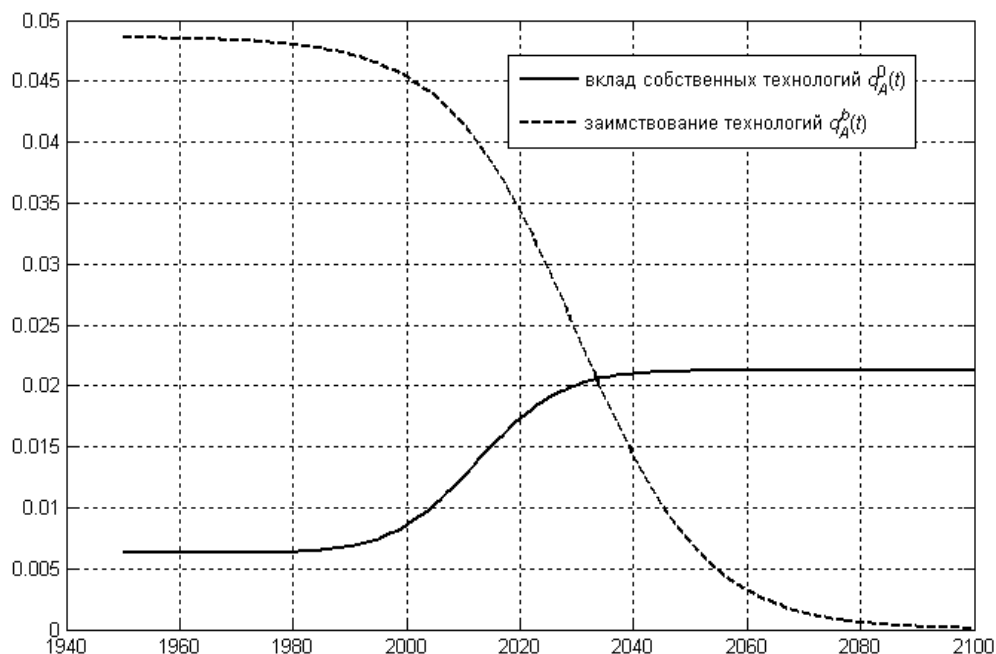


Рисунок 16. Темпы развития технологий в Китае

На примере Японии (рис.15) мы видим, что в послевоенные годы она очень эффективно осуществляла заимствование технологий для обеспечения высоких темпов экономического роста вплоть до 1990-х годов, тогда как собственные технологические разработки Японии играли весьма скромную роль. Начиная с 1990-х годов Япония уже развивалась преимущественно за счет собственных технологических инноваций, которые, как видно из рис.15, способны обеспечивать только умеренные темпы экономического роста не превышающие 3%. Возможно в этом как раз и заключается основная причина стагнации японской экономики в последние десятилетия. Примерно та же картина наблюдается для Китая (рис.16), которая динамично развивается с 1980-х годов путем активного заимствования технологий извне. Вместе с тем Китай сегодня успешно развивает и собственную технологическую базу, что свидетельствует о больших перспективах развития Китая в XXI веке.

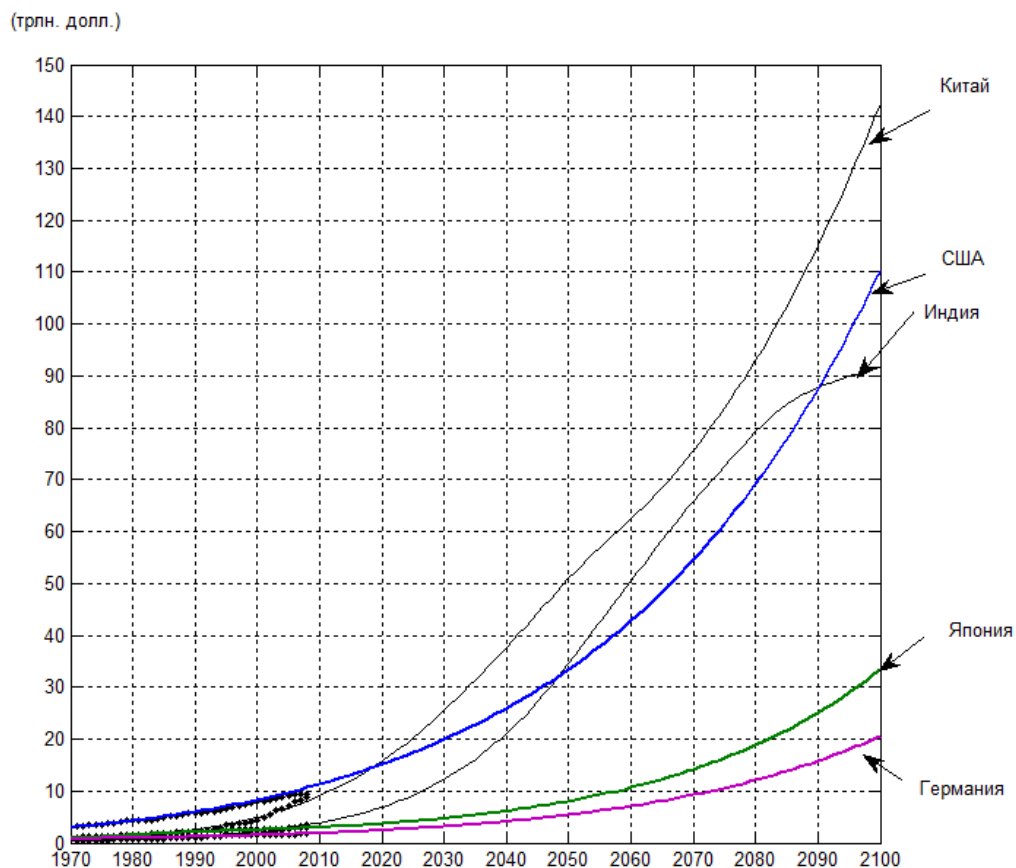


Рисунок 17. Сравнение динамики ВВП развитых и развивающихся стран (в постоянных ценах 1990г)

Итоговое сравнение динамики ВВП развитых и развивающихся стран вплоть до 2100г представлено на рис. 17. Полученные результаты показывают, что в ближайшее время по объему ВВП Китай опередит США, увеличив отрыв к 2050 г. почти на 20 трлн. долл., а к 2100г более чем на 30 трлн. долл. ВВП Индии будет расти практически с такой же скоростью как и ВВП Китая, но за счет более низкого объема ВВП в настоящее время Индии не удастся обогнать Китай. Более того, к 2080г ВВП Индии замедлит рост, а в дальнейшем пойдет на спад из-за демографических проблем, связанных с экологическим кризисом. Развитые страны, в частности Япония и Германия, будут демонстрировать устойчивый рост ВВП.

Любопытно сравнить полученные нами результаты (А) с данными уже имеющихся прогнозов ВВП авангардных стран мира до 2050 г., полученными исследовательскими центрами всемирно известных американских инвестиционных фирм Goldman Sachs (GS) и PricewaterhouseCoopers (PWC), а также OECD. Все интересующие нас данные представлены в табл.1.

Таблица 1. Прогноз ВВП авангардных стран мира к 2050 г. (трлн. долл.)

Страна	2050				2100
	А	GS	PWC	OECD	А
США	33,5	35,2	36,0	36,6	110,3

Китай	51,1	44,5	51,5	50,4	142,5
Индия	34,6	27,8	36,0	39,4	91,7
Япония	8,0	6,7	8,3	8,9	33,4
Германия	5,4	3,6	5,4	5,7	20,6

Результаты прогнозов PWC (Hawkswarth, 2006) и OECD (OECD,2007) даны в пересчете на доллары США по ППС (прогноз OECD в ценах 2000 г.). Результаты прогнозов GS (Wilson, Parashothaman, 2003) даны в пересчете на доллары США по валютному курсу в ценах 2003 г., поэтому и представляют собой несколько заниженные величины ожидаемых ВВП. Как видно из рассмотрения табл. 1 все представленные прогнозы довольно близки друг к другу.

5. ВЫВОД ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ, ОПИСЫВАЮЩЕГО СОВМЕСТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДОЛГОВРЕМЕННОГО РОСТА И ДЕЛОВЫХ ЦИКЛОВ

Экономика, как правило, колеблется вокруг своей трендовой траектории. Эти колебания носят циклический, но нерегулярный характер. Тренд есть результат действия факторов, обуславливающих долговременный рост в экономике, таких как приток капитала, прирост трудовых ресурсов, научно-технический прогресс. А циклы деловой активности представляют собой отклонения реального совокупного выпуска от своего долгосрочного тренда, вызванные распределенными во времени случайными шоками предложения. В 50-х годах прошлого столетия были разработаны изящные математические модели теории циклов, основанные на механизме взаимодействия мультипликатора и акселератора (Аллен, 1963), а также неоклассические теории экономического роста, использующие производственные функции (Столерю, 1974). Они стали отправной точкой всех последующих исследований в этих двух центральных вопросах макроэкономической динамики. Основным недостатком указанных моделей стало изолированное рассмотрение роста и циклических колебаний друг от друга, тогда как из теории экономического развития Шумпетера (1982) вытекает, что циклические колебания - это составная часть долгосрочного экономического роста. Поэтому теория реальных деловых циклов (РДЦ) должна обязательно включать в себя взаимодействие механизмов роста и циклических колебаний. Основы дискретной теории РДЦ были заложены в 80-х годах прошлого века нобелевскими лауреатами Ф.Кюдландом и Э.Прескоттом (Kydland, Prescott, 1982). Разработанная ими модель РДЦ базировалась на стохастической динамической модели общего равновесия и включала в себя также стохастическую версию неоклассической модели экономического роста Солоу (Solow, 1956). Дискретная модель РДЦ Кюдланда и Прескотта стала с тех пор базовой в макроэкономическом компьютерном моделировании. Однако этой модели также присущи ряд серьезных недостатков, существенно ограничивающих ее применение.

В настоящей работе впервые предпринята попытка создания непрерывной модели РДЦ, путем вывода общего дифференциального уравнения макроэкономической динамики, основанного на взаимодействии механизмов роста и циклических колебаний. Итак, приступим к выводу общего уравнения макроэкономической динамики, следуя наиболее плодотворной схеме, избранной в свое время Филлипсом (Аллен, 1963). В этой схеме предполагается, что плановые величины потребления и капиталовложений реализуются. Мы также придерживаемся этой предпосылки, поскольку она является экономически наиболее значимой. Следовательно планы потребления и капиталовложений с определенным запаздыванием превращаются в фактические затраты, дающие в сумме выпуск продукции. Если выделить независимые от дохода расходы A как на капиталовложения, так и на потребление, то основное условие равновесия запишется в виде

$$Y = C + I + A, \quad (37)$$

где C – потребление; I – фактические индуцированные капиталовложения.

Поскольку I представляет собой фактические индуцированные капиталовложения в момент времени t , вызванные изменениями в выпуске продукции и запаздыванием в виде показательной функции, они удовлетворяют дифференциальному уравнению запаздывания:

$$\frac{dI}{dt} = -\alpha [I(t) - J(t)] \quad (38)$$

где $J(t)$ – потенциальный объем капиталовложений; α – скорость реакции запаздывания, а временная постоянная запаздывания $T = \frac{1}{\alpha}$. Объем решений о

капиталовложениях $J(t)$ и текущая скорость изменения выпуска продукции связаны в общем случае с помощью нелинейного акселератора

$J(t) = \psi \left\{ v \frac{dY}{dt} \right\}$ (Аллен, 1963), где v – мощность акселератора ($v > 0$). Гудвин по-

казал (Аллен, 1963), что наиболее приемлемой функцией для нелинейного акселератора является логистическая функция. Следовательно имеем:

$$J(t) = \frac{1}{2} th \left(\frac{kv}{2} \frac{dY}{dt} \right) \cong \frac{1}{2} \left[\frac{kv}{2} \frac{dY}{dt} - \frac{1}{3} \left(\frac{kv}{2} \frac{dY}{dt} \right)^3 \right]. \quad (39)$$

Здесь мы ограничились двумя членами степенного ряда, что является хорошим приближением при условии $\left| \frac{kv}{2} \frac{dY}{dt} \right| < \frac{\pi}{2}$, которое всегда выполняется для

реальных значений v и $\frac{dY}{dt}$. Поскольку для малых значений $\left| \frac{dY}{dt} \right|$ имеет ме-

сто простейший или линейный акселератор $J(t) = v \frac{dY}{dt}$, то непосредственно

из (39) следует, что $k=4$. Таким образом, далее всюду, мы принимаем следующую аппроксимацию для нелинейного акселератора по Гудвину:

$$J(t) \cong \left[1 - \frac{4}{3} \left(v \frac{dY}{dt} \right)^2 \right] v \frac{dY}{dt} \quad (40)$$

Вернемся снова к основному условию равновесия (37). Поскольку запаздывания спроса отсутствуют, а планируемое потребление $C = cY = (1-s)Y$, где c и s – коэффициенты потребления и сбережений, то совокупный спрос будет равен $Z = (1-s)Y + I + A$. (41)

Предложение также берется с непрерывно распределенным запаздыванием показательной формы и скоростью реакции λ :

$$\frac{dY}{dt} = -\lambda(Y - Z). \quad (42)$$

Уравнения (38), (41) и (42) являются уравнениями модели для реальной экономической системы. Чтобы получить дифференциальное уравнение относительно выпуска Y необходимо исключить Z и I из уравнений модели. С этой целью сначала подставим (41) в (42), учитывая, что в (41) мы имеем потенциальные или ожидаемые (Y^e, I^e) величины переменных, т.е. $Z = (1-s)Y^e + I^e + A^e$. Однако $A^e = A$ как заданные независимые инвестиции, а $I^e = I$ согласно принятой предпосылке модели. Следовательно будем иметь

$$\frac{dY}{dt} = -\lambda[Y - (1-s)Y^e - I - A].$$

Разрешив последнее уравнение относительно I и дифференцируя полученное выражение получаем соответственно:

$$I = \frac{1}{\lambda} \frac{dY}{dt} + Y - (1-s)Y^e - A; \quad \frac{dI}{dt} = \frac{1}{\lambda} \frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{dY}{dt} - (1-s) \frac{dY^e}{dt} - \frac{dA}{dt}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (38) получаем следующее дифференциальное уравнение относительно выпуска Y :

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \left\{ \lambda + \varkappa - \varkappa \lambda v \left[1 - \chi \frac{4}{3} \left(v \frac{dY}{dt} \right)^2 \right] \right\} \frac{dY}{dt} - \lambda(1-s) \frac{dY^e}{dt} + \varkappa \lambda Y - \varkappa \lambda (1-s) Y^e = \lambda \frac{dA}{dt} + \varkappa \lambda A. \quad (43)$$

Здесь введена постоянная χ , которая принимает лишь два значения -0 или 1. При $\chi = 0$ имеем классическую модель Филлипса с линейным акселератором, а в случае $\chi = 1$ получаем модель Филлипса-Гудвина со встроенным нелинейным акселератором (Аллен, 1963).

Если в уравнении (43) примем $Y = Y^e$, что является весьма грубым приближением, так как доход Y есть непланируемая величина, а также положим $\chi = 0$ и $A = const$, то мы придем к широко известному уравнению Филлипса (Аллен, 1963):

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + (\lambda s + \varkappa - \varkappa \lambda v) \frac{dY}{dt} + \varkappa \lambda s Y = \varkappa \lambda A.$$

В отличие от Филлипса и Гудвина, мы внесем в уравнение (43) выражение для потенциального (ожидаемого) значения выпуска Y^e , определяемо-

го через основные производственные факторы - капитал (K) и труд (L). Как известно (Столерю, 1974), связь выпуска с факторами производства определяется производственной функцией вида $\bar{Y} = F(K, L)$, которая представляет собой траекторию долгосрочного экономического роста. Поскольку производственные функции обладают свойством однородности они удовлетворяют уравнению Эйлера (Столерю, 1963):

$$aK \frac{\partial \bar{Y}}{\partial K} + bL \frac{\partial \bar{Y}}{\partial L} = h\bar{Y},$$

где a, b и h - постоянные коэффициенты. Отсюда следует требуемое приближенное выражение для ожидаемого значения выпуска Y^e :

$$Y^e \cong \bar{Y} = \frac{a}{h} K \frac{\partial \bar{Y}}{\partial K} + \frac{b}{h} L \frac{\partial \bar{Y}}{\partial L}. \quad (44)$$

Очевидно, что данное приближение является более точным нежели весьма грубое допущение Филлипса: $Y = Y^e$. Но главное достоинство такого подхода состоит в том, что он дает возможность ввести в основное уравнение производственные факторы. Дифференцируя (44) по времени и проводя необходимые упрощения получим:

$$\frac{dY^e}{dt} \cong \frac{\partial \bar{Y}}{\partial K} \frac{dK}{dt} + \frac{\partial \bar{Y}}{\partial L} \frac{dL}{dt}. \quad (45)$$

Необходимо исключить отсюда $\frac{dL}{dt}$. Для этого воспользуемся законом Оукена (Сакс, Ларрен, 1999), устанавливающим связь между величиной циклической или конъюнктурной безработицы ($u - u^*$) и конъюнктурным разрывом в выпуске ($Y_F - Y$):

$$\frac{Y_F - Y}{Y_F} = \gamma(u - u^*). \quad (46)$$

Здесь, γ - параметр Оукена ($\gamma = 2 \div 3$); $Y_F(L^*)$ - национальный доход при полной занятости; $Y(L)$ - фактический объем выпуска при наличии конъюнктурной безработицы; L^* - численность рабочих при полной занятости; L - фактическая численность рабочих, занятых в производстве; u^* - естественный уровень безработицы, соответствующий полной занятости L^* ; u - фактический уровень безработицы. Поскольку $u - u^* = \frac{L^* - L}{L^*}$, то из соотношения (46)

следует, что $Y_F - Y = \gamma^* (L^* - L)$, где $\gamma^* = \gamma \frac{Y_F}{L^*}$. Дифференцируя обе части по-

следнего соотношения получаем требуемое выражение: $\frac{dL}{dt} = \frac{1}{\gamma^*} \frac{dY}{dt}$. (47)

Как известно, средняя производительность труда $\left(\frac{Y_k}{L^*}\right)$ связана с предельной (маржинальной) производительностью труда $\left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial L}\right)$ следующим образом

(Сакс, Ларрен, 1999):
$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial L} \cong \beta \frac{Y_F}{L^*}. \text{ Следовательно, } \gamma^* = \frac{\gamma}{\beta} \frac{\partial \bar{Y}}{\partial L}. \quad (48)$$

Подставляя выражения (47) и (48) в исходное выражение (45) получаем:

$$\frac{dY^e}{dt} = \frac{\partial \bar{Y}}{\partial K} \frac{dK}{dt} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{dY}{dt}. \quad (49)$$

А теперь остается подставить Y^e (44) и $\frac{dY^e}{dt}$ (49) в уравнение (43). В результате мы получаем искомое общее дифференциальное уравнение макроэкономической динамики:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y}{dt^2} + \left[\lambda + \alpha - \alpha \lambda v - \lambda(1-s) \frac{\beta}{\gamma} + \chi \frac{4}{3} \alpha \lambda v \left(v \frac{dY}{dt} \right)^2 \right] \frac{dY}{dt} + \\ + \alpha \lambda Y - \alpha \lambda(1-s) \bar{Y} - \lambda(1-s) \frac{\partial \bar{Y}}{\partial K} \frac{dK}{dt} = \lambda \left(\frac{dA}{dt} + \alpha A \right) \end{aligned} \quad (50)$$

При подходящих начальных и граничных условиях дифференциальное уравнение (50) позволяет найти движение потока выпуска продукции. Данное уравнение учитывает закон накопления капитала, а также закон Оукена, устанавливающий связь между колебаниями уровня безработицы и колебаниями выпуска. Отдельные коэффициенты уравнения могут быть случайными величинами. Правая часть уравнения, как правило, содержит случайную составляющую. Поэтому уравнение (50) в общем случае является стохастическим дифференциальным уравнением, объединяющим детерминистские и стохастические подходы к исследованию реальных деловых циклов. В этом уравнении мы имеем дело с двумя переменными, характеризующими выпуск продукции: быстроменяющейся переменной $Y(t)$, которая содержит циклические колебания $y = Y - \bar{Y}$, и медленноменяющейся $\bar{Y}(t)$, представляющей трендовую кривую. Это обстоятельство позволяет их разделить путем применения метода усреднения Крылова-Боголюбова-Митропольского (Боголюбов, Митропольский, 1974). Действительно, можно сначала провести усреднение быстроменяющейся переменной $y(t)$ и получить усеченное описание системы, учитывающее только ее осредненную эволюцию, представляющую долговременный тренд, описываемый $\bar{Y}(t)$. Такой подход позволяет относительно легко найти обе зависимости.

Для дальнейшего анализа уравнения (50) важно выделить трендовую составляющую в его правой части, которая определяется независимыми от дохода инвестициями. Сюда входят капиталовложения государственных и частных организаций в развитие обще-

ственной инфраструктуры, а также инвестиции вызываемые научно-техническим прогрессом, изобретениями и технологическими нововведениями, которые определяют не только долгосрочный экономический рост, но также влияют на краткосрочные колебания, поскольку они носят нерегулярный характер. Сюда же относятся независимые расходы на потребление домохозяйств. Итак, независимые инвестиции $A(t)$ всегда можно представить в виде $A(t) = \bar{A}(t) + \varphi(t)$, где $\bar{A}(t)$ - трендовая составляющая (например, $\bar{A}(t) = A_0 e^{st}$); $\varphi(t)$ - квазипериодическая функция, колеблющаяся вокруг трендовой составляющей. Таким образом, правая часть уравнения примет вид:

$$\frac{dA}{dt} + \alpha A = \left(\frac{d\bar{A}}{dt} + \alpha \bar{A} \right) + \left(\frac{d\varphi}{dt} + \alpha \varphi \right). \quad (51)$$

Второе слагаемое в правой части данного выражения оказывает непосредственное влияние на циклические колебания.

Прежде всего выделим в основном уравнении (50) циклические колебания, описываемые переменной $y = Y - \bar{Y}$. Для этого сначала нелинейный член $\left(v \frac{dY}{dt} \right)^2$ заменим приближенно на $\left(v \frac{dy}{dt} \right)^2$, чтобы воспользоваться принципом суперпозиции, поскольку \bar{Y} является медленноменяющейся функцией в сравнении с Y или y . Причём, этот нелинейный член сохраняется только с y ($\chi = 1$) и отсутствует при \bar{Y} ($\chi = 0$). Подставив $Y = y + \bar{Y}$ в линейное уравнение (50) получим:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \sigma \frac{dy}{dt} + \omega^2 y + \frac{d^2 \bar{Y}}{dt^2} + \bar{\sigma} \frac{d\bar{Y}}{dt} + \bar{\omega}^2 \bar{Y} - \lambda(1-s) \frac{\partial \bar{Y}}{\partial K} \frac{dK}{dt} = \lambda \left(\frac{d\bar{A}}{dt} + \alpha \bar{A} \right) + \lambda \left(\frac{d\varphi}{dt} + \alpha \varphi \right) \quad (52)$$

$$\text{Здесь } \sigma = \lambda + \alpha - (1-s)\lambda \frac{\beta}{\gamma} - \alpha \lambda v \left[1 - \frac{4}{3} \left(v \frac{dy}{dt} \right)^2 \right]; \quad \omega^2 = \lambda \alpha; \quad \bar{\omega}^2 = \lambda \alpha s; \quad (53)$$

$$\bar{\sigma} = \lambda + \alpha - \alpha \lambda v - (1-s)\lambda \frac{\beta}{\gamma}. \text{ Поскольку } \frac{\partial \bar{Y}}{\partial L} \text{ и } \frac{\partial \bar{Y}}{\partial K} \text{ являются медленно}$$

меняющимися функциями, то в уравнении и коэффициентах σ и ω^2 их можно заменить выражениями, вытекающими из максимизации прибыли в условиях совершенной конкуренции (Столерю, 1974):

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial K} = i; \quad \frac{\partial \bar{Y}}{\partial L} = w \cong \beta \frac{Y_F}{L^*},$$

где i -норма процента; w -реальная заработная плата; β -отражает эластичность выпуска по труду в производственной функции Кобба-Дугласа. Вторым из

этих соотношений мы уже воспользовались ранее. Следовательно уравнение (52) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} + \delta \frac{dy}{dt} + \omega^2 y + \frac{d^2 \bar{Y}}{dt^2} + \bar{\delta} \frac{d\bar{Y}}{dt} + \bar{\omega}^2 \bar{Y} = \\ = \lambda \left(\frac{d\bar{A}}{dt} + \varkappa \bar{A} \right) + \lambda \left(\frac{d\varphi}{dt} + \varkappa \varphi \right) + \lambda(1-s)i \frac{dK}{dt}. \end{aligned} \quad (54)$$

Следующим шагом мы проведем усреднение уравнения (54) по быстроменяющимся переменным y и φ и получаем усеченное дифференциальное уравнение, описывающее только ее осредненную эволюцию, т.е. трендовую траекторию:

$$\frac{d^2 \bar{Y}}{dt^2} + \bar{\sigma} \frac{d\bar{Y}}{dt} + \bar{\omega}^2 \bar{Y} = \lambda \left(\frac{d\bar{A}}{dt} + \varkappa \bar{A} \right) + \lambda(1-s)i \frac{dK}{dt} = F_1(t) \quad (55)$$

Начальные условия имеют вид: $\bar{Y}|_{t=\tau_0} = \bar{Y}_0; \quad \frac{d\bar{Y}}{dt}|_{t=\tau_0} = x_0.$ (56)

Поскольку принцип усреднения заключается в том, что быстроменяющиеся члены основного уравнения должны компенсироваться независимо от медленноменяющихся членов, то соответствующее уравнение

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \sigma \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = \lambda \left(\frac{d\varphi}{dt} + \varkappa \varphi \right)$$

даст решение, описывающее циклические колебания. Причем в данном уравнении с самого начала мы должны учитывать нелинейность акселератора, заключенную в коэффициенте σ (53). Поэтому в дальнейшем мы будем анализировать решение нелинейного дифференциального уравнения в виде:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \left[\sigma_0 - \frac{4}{3} \varkappa \lambda \nu^3 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = F_2(t), \quad (57)$$

где $\sigma_0 = - \left[\lambda + \varkappa - \varkappa \lambda \nu - \lambda(1-s) \frac{\beta}{\gamma} \right]; \quad \omega^2 = \lambda \varkappa; \quad \beta = \frac{h}{b} - a.$

Полученное уравнение широко известно как уравнение Рэля, которое имеет большое значение в теории автоколебаний.

Уравнение (57) включает в себя нелинейный акселератор инвестиций равный $\frac{4}{3} k \lambda \left(\nu \frac{dy}{dt} \right)^3$, который обеспечивает поддержание в данной экономической системе незатухающих циклических колебаний. Экономическая система с нелинейным акселератором является классической автоколебательной системой, в которой роль механизма положительной обратной связи играет нелинейный акселератор, а в качестве коэффициента усиления служит мощность акселератора ν . Если коэффициент усиления ν достаточно велик ($\nu > 1,05$), то в системе возникает самоподдерживающийся колебательный процесс, характеристики которого определяются внутренними (структурными) параметрами системы (Акаев, 2008). Таким образом, в точке $\nu = 1,05$ в

системе происходит бифуркация рождения цикла. При выводе уравнения (57) была также учтена циклическая безработица, которая возникает в периоды спадов, что позволяет рассматривать реальную экономику с неполной занятостью. Как известно, колебания уровня безработицы связаны с колебаниями фактического выпуска согласно закону А. Оукена.

Выше уже было отмечено, что мощность акселератора является управляющим параметром и оказывает решающее влияние на динамику экономической системы, на формирование траектории долгосрочного экономического роста. Поскольку мощность акселератора пропорциональна предпринимательской активности, а последняя определяется экономической конъюнктурой, в первом приближении можно полагать, что она меняется медленно, по синусоиде, синхронно с большим циклом Кондратьева, т.е.:

$$v = v_0 - \frac{1}{2}v_1 \sin \psi t, \quad v \geq 0. \quad (58)$$

Так как продолжительность пятого цикла Кондратьева составляет 36 лет, то можно принять $\psi = \frac{2}{11}$ ($T = 11\pi \approx 34,5$ лет). Диапазон практического изменения мощности акселератора $0 < v < 2$ (Акаев, 2008), поэтому целесообразно, чтобы $v_0 \geq 0,8$. В дальнейших расчетах мы принимаем $v_0 = 1$.

Линейное дифференциальное уравнение (55) с постоянными коэффициентами может быть проинтегрировано в аналитической форме. Для нелинейного дифференциального уравнения (57), в случае слабой нелинейности акселератора (при небольших значениях мощности акселератора) можно также получить приближенное решение в явной аналитической форме с помощью метода усреднения КБМ.

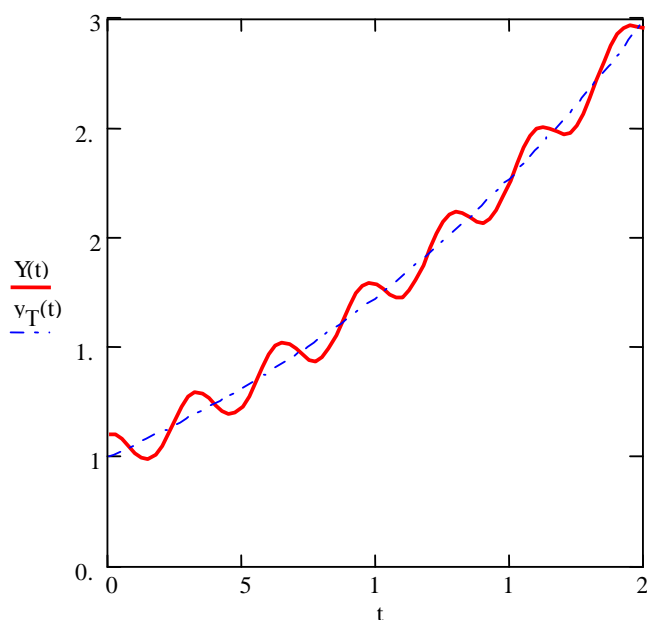


Рисунок 18. Собственные колебания экономической системы

Эти случаи подробно рассмотрены в работе (Акаев, 2009). Приведем 3 конкретных примера.

Первый пример иллюстрирует собственные колебания экономической системы. Внешнее воздействие отсутствует, т.е. $\varphi^* = 0$. Предположим, что трендовая траектория имеет экспоненциальный характер. Тогда, решая уравнение (57) методом усреднения КБМ, получаем циклические колебания $y_{cm} = y_0 \cos(\omega t + \vartheta)$.

Далее, путем суперпозиции трендовой траектории и циклических колебаний, получаем весьма простую приближенную формулу для описания стационарного режима выпуска:

простую приближенную формулу для описания стационарного режима выпуска:

$$Y_{cm} = e^{pt} + y_0 \cos(\omega t + \vartheta), \quad y_0 = \sqrt{\frac{\sigma_0}{\sigma_1}}, \quad (59)$$

где $\sigma_1 = \varkappa \lambda \nu^3 \omega^2$; p - темп роста тренда. График соответствующей траектории экономического развития представлен на рис. 18.

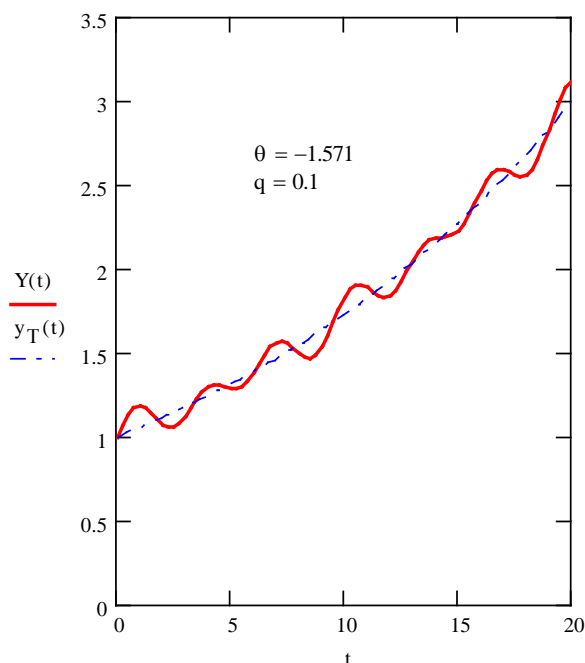


Рисунок 19. Вынужденные колебания экономической системы

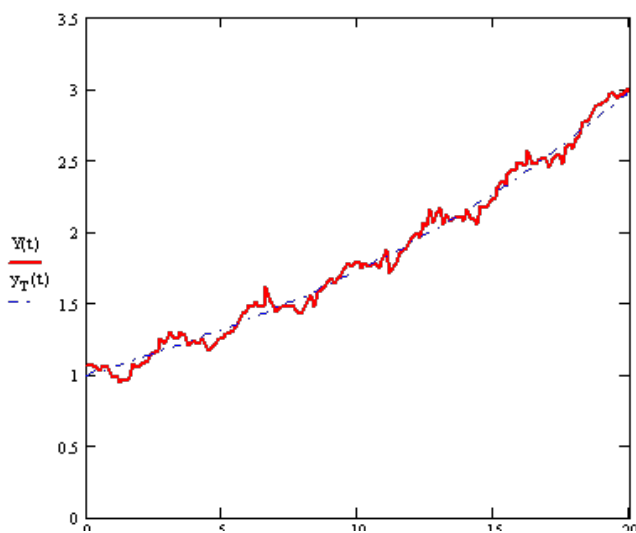


Рисунок 20. Воздействие стационарного «белого шума» на экономическую систему при $\sigma=0,05$ ($a_m=0,084$, $\sigma_a=0,046$, $\sigma_\theta=0,213$).

Второй пример показывает влияние внешних периодических возмущений. Допустим, что $\varphi^* = q \sin \nu t$. В этом случае суперпозиция решений уравнений (55) и (57) имеет вид:

$$Y_{cm} = e^{pt} + \sigma_3 \cos(\omega t + \vartheta) + \frac{q}{\omega^2 - \nu^2} \sin \nu t,$$

где $\sigma_3 = \frac{4\sigma_0 - 6\sigma_2(\nu U)^2}{3\sigma_2\omega^2}$; $\sigma_2 = \frac{4}{3}\varkappa\lambda\nu^3$;

$$U = \frac{q}{\omega^2 - \nu^2}. \quad (60)$$

Траектория движения выпуска (60) представлена на рис.19.

Третий пример иллюстрирует воздействие на экономическую систему стационарного «белого шума» $\sigma_\xi \xi(t)$, где $\xi(t)$ - гауссовский белый шум; σ_ξ - среднее квадратическое отклонение. Одна из множества стохастических траекторий развития выпуска представлена на рис. 20.

В работе (Акаев, 2008) дан качественный анализ решений дифференциальных уравнений (55) и (57), описывающих циклические колебания деловой активности и экономический рост, исследована устойчивость системы, рассчитана точка бифуркации, где система теряет устойчивость и становится восприимчивой к структурным изменениям и инновациям. Показано, что следствием бифуркации является возникновение в системе самоподдерживаемых незатухающих автоколебаний. Именно в условиях неравновесия происходит смена уровней равновесия, что вызывает возрастающий экономический рост. Выявлен также механизм влияния циклических колебаний на формирование траектории долговременного эко-

номического роста. Все это наглядно иллюстрируется фазовым портретом представленным на рис. 21.

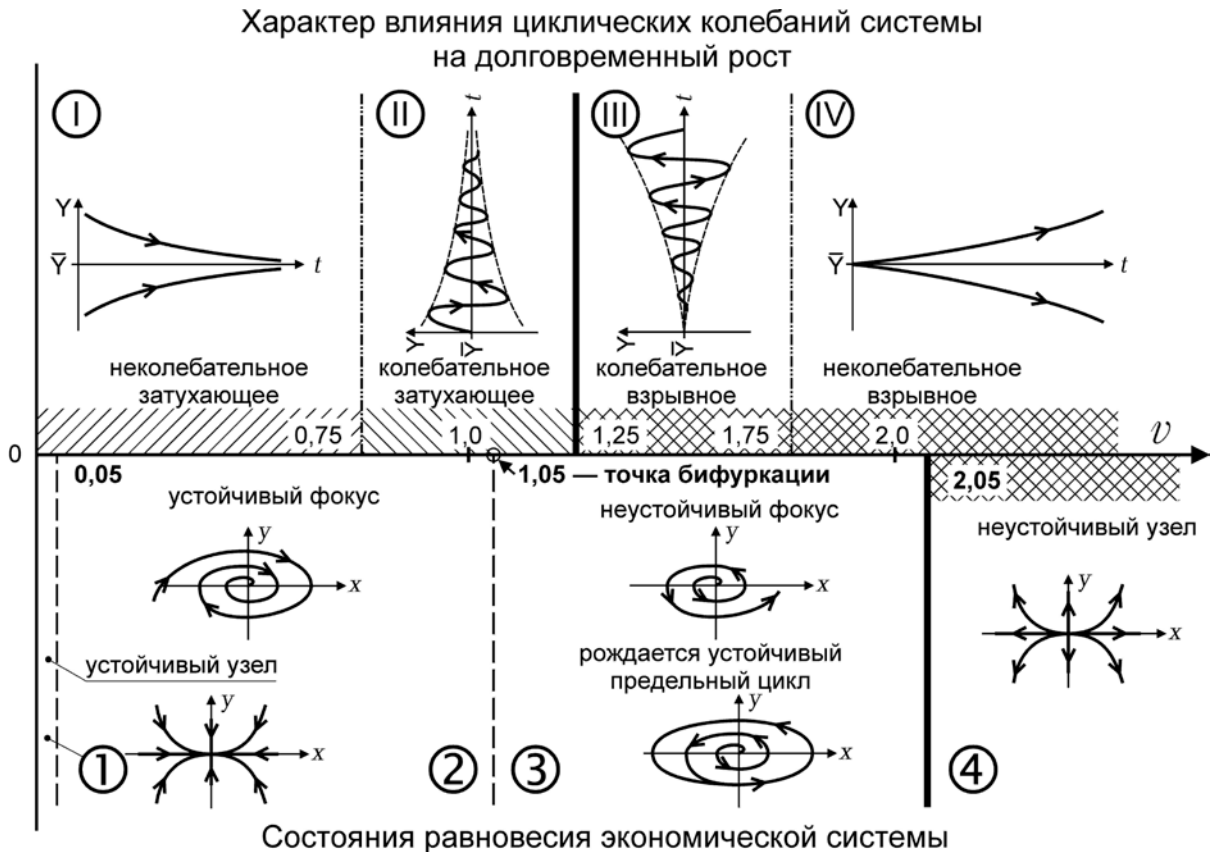


Рис.21. Фазовый портрет, характеризующий зону устойчивости динамической экономической системы

В общем случае, когда коэффициенты дифференциальных уравнений (55) и (57) переменные (медленноменяющиеся), а нелинейность акселератора существенна, тогда для решения указанных уравнений необходимо воспользоваться численными методами и осуществлять компьютерное моделирование. Результаты компьютерного моделирования экономической системы (55)-(57) со сложнопериодическим внешним возмущением и переменной мощностью акселератора (58) при различных значениях мощности, близких к критическому, представлены на рис. 22. Как видно из рассмотрения графиков, при определенных значениях мощности ($\nu_0=1$; $\nu_1=1,05$) происходит потеря устойчивости системы и экономика испытывает кризис, впадая в глубокую рецессию ($\nu_0=1$; $\nu_1=1,1$). Важно отметить, что потеря устойчивости связана с ломкой трендовой кривой, но не циклических колебаний. Это соответствует утверждению И. Шумпетера о том, что равновесная траектория ступенчатая, но остаток после ее вычитания описывается циклическими колебаниями (Шумпетер, 1982).

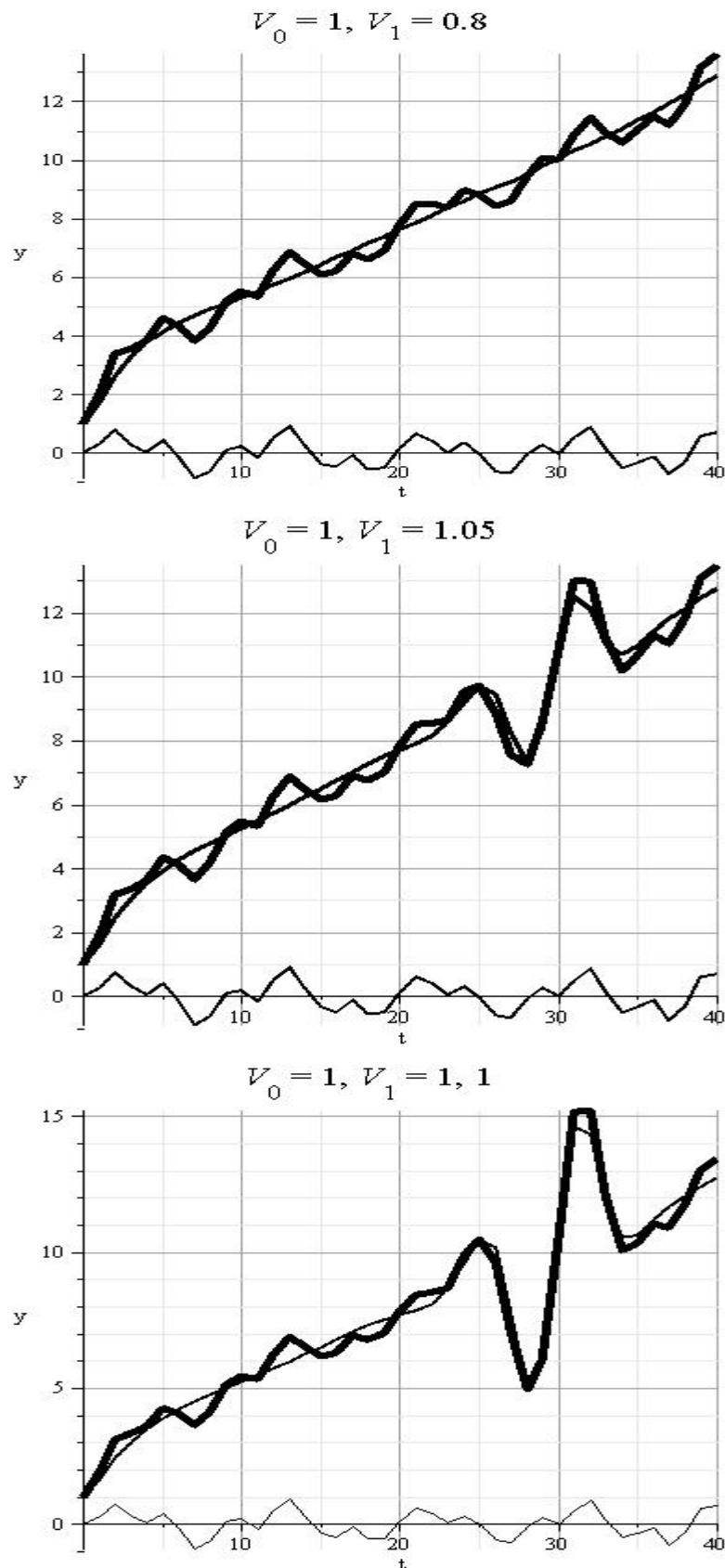


Рис. 22. Численные решения уравнений макроэкономической динамики:
 а) тренд и циклические колебания представлены линиями средней толщины б) движение выпуска дано толстыми линиями

6. Верификация уравнения макроэкономической динамики и долгосрочное прогнозирование на примере США

Ниже представлены результаты компьютерного моделирования макроэкономической динамики США путем численного решения дифференциальных уравнений, описывающих трендовую траекторию экономического развития (55) и циклические колебания (57), с последующей суперпозицией полученных решений. Проводится верификация математической модели (54) – (57) на примере экономического развития США в период пятого кондратьевского цикла с 1983 по 2008 гг. Затем модель используется для прогнозирования экономического развития США до 2050 г. в соответствии с инновационной стратегией развития.

Прежде всего необходимо определить правые части уравнений (55) и (57). Они определяются путем задания функционального выражения для основного производственного капитала:

$$K = \bar{K}(t) + \varphi^*(t) = \frac{K_0(1+k_1)}{1+k_1 \exp[-\theta(t-T_0)]} + q_1 \left[\sin \omega_1(t-T_0) + \frac{q_2}{q_1} \sin \omega_2(t-T_0) \right]. \quad (61)$$

Здесь первое слагаемое описывает трендовую траекторию движения производственного капитала, которая выражается логистической функцией, а второе – циклические колебания, описывающие циклы Китчина (q_1, ω_1) и Жюгляра (q_2, ω_2) .

Зная $K(t)$ можно определить функцию движения производственных инвестиций (капиталовложений) по известной формуле инвестиций:

$$A = \frac{dK}{dt} + \mu K = \frac{d\bar{K}}{dt} + \mu \bar{K} + \frac{d\varphi^*}{dt} + \mu \varphi^*, \quad (62)$$

где μ - норма выбытия основного капитала.

Используя соотношения (61) и (62) получаем функциональные выражения для правых частей уравнений (55) и (57):

$$F_1(t) = \lambda K_0(1+k_1) \frac{\exp[-\theta(t-T_0)]}{1+k_1 \exp[-\theta(t-T_0)]} \left\{ \varkappa \mu \exp[\theta(t-T_0)] + \frac{[\mu + \varkappa + (1-s)i]k_1 \theta}{1+k_1 \exp[-\theta(t-T_0)]} + \frac{k_1 \theta^2 \{k_1 \exp[-\theta(t-T_0)] - 1\}}{\{1+k_1 \exp[-\theta(t-T_0)]\}^2} \right\}, \quad (63)$$

$$F_2(t) = q_1 \lambda \left\{ (\mu + \varkappa) \left[\omega_1 \cos \omega_1(t-T_0) + \omega_2 \frac{q_2}{q_1} \cos \omega_2(t-T_0) \right] - \omega_1^2 \sin^2 \omega_1(t-T_0) - \omega_2^2 \frac{q_2}{q_1} \sin \omega_2(t-T_0) + \varkappa \mu \left[\sin \omega_1(t-T_0) + \frac{q_2}{q_1} \sin \omega_2(t-T_0) \right] \right\}. \quad (64)$$

Следующим этапом является калибровка модели движения основного производственного капитала (61). Модель содержит 6 параметров: $k_1, \theta, q_1, \omega_1, q_2, \omega_2$. Начальное значение основного капитала K_0 соответствует фактическому объему капитала в 1983 г. (T_0) – начальном году пятого кондратьевского цикла (1982-2018 гг.), который мы находим в национальных счетах ООН (United Nations database). Максимальное значение основного капитала, соответствующее фактическому объему капитала в 2008 г., можно определить на уровне $0,9 K_m$ (K_m – величина насыщения). Отсюда получаем

$$K_{2008} = 0,9 K_0 (1 + k_1). \text{ Следовательно, } k_1 = \frac{K_{2008}}{0,9 K_0} - 1. \text{ Остальные параметры}$$

($\theta, q_1, \omega_1, q_2, \omega_2$) определяются следующим образом. Сначала находим параметр θ , управляющий трендовой составляющей:

$$\bar{K}(t) = \frac{K_0 (1 + k_1)}{1 + k_1 \exp[-\theta(t - T_0)]}. \quad (65)$$

Поскольку K_0 и k_1 уже известны и взяты из базы данных, то параметр θ легко находится методом наименьших квадратов с использованием всей имеющейся выборки фактических значений K_i в заданном промежутке времени (1983-2008гг.).

Для определения параметров $q_1, \omega_1, q_2, \omega_2$, управляющих колебательными отклонениями от тренда в модели движения основного капитала (61), необходимо воспользоваться уравнением инвестиций (62), которое с учетом конкретной модели движения капитала (61) примет вид:

$$A = \frac{K_0 (1 + k_1)}{1 + k_1 \exp[-\theta(t - T_0)]} \left\{ \mu + \frac{k_1 \theta \exp[-\theta(t - T_0)]}{1 + k_1 \exp[-\theta(t - T_0)]} \right\} + q_1 \left[\omega_1 \cos \omega_1 (t - T_0) + \right. \\ \left. + \omega_2 \frac{q_2}{q_1} \cos \omega_2 (t - T_0) \right] + \mu q_1 \left[\sin \omega_1 (t - T_0) - \frac{q_2}{q_1} \sin \omega_2 (t - T_0) \right]. \quad (66)$$

Фактические значения автономных инвестиций (A) имеются в тех же базах данных ООН (United Nations database). Важно то, что именно в автономных инвестициях более выпукло проявляются колебательные отклонения от трендовой составляющей и поэтому уравнение (66) служит наилучшим способом нахождения параметров $q_1, \omega_1, q_2, \omega_2$.

В уравнении (66) появляется норма выбытия основного капитала μ , которая со временем растет благодаря постоянному развитию технического прогресса, причем она может быть аппроксимирована линейной зависимостью:

$$\mu = \mu_0 + \mu_1 (t - T_0). \quad (67)$$

Постоянные μ_0 и μ_1 легко находятся методом наименьших квадратов с использованием выборки фактических значений μ за период 1983-2008 гг., которая также содержится в национальных счетах ООН (United Nations database)

Поскольку продолжительность пятого кондратьевского цикла (T) была установлена в 36 лет (1983-2018 гг.) и известно, что в каждом большом цикле Кондратьева укладывается 6 (шесть) среднесрочных циклов Жюгляра, то можно полагать $\omega_2 = \frac{12}{11}$ ($T_2 = \frac{11}{6} \pi \cong 5,8$ лет). В соответствии с установившимся уровнем товарно-материальных запасов в США на рубеже XX и XXI веков, продолжительность циклов Китчина обычно колеблется в диапазоне 35-40 месяцев. Поэтому для США можно принять $\omega_1=2$ ($T_1 = \pi = 3,14$ г. или 37,7 месяцев).

Таким образом, остается определить параметры q_1 и q_2 , которые являются амплитудами соответствующих циклов Китчина и Жюгляра. Значения этих параметров находятся уже методом наименьших квадратов из уравнения (66) с использованием выборки имеющихся фактических значений автономных инвестиций (A_i) в период с 1983 по 2008 гг. Этим завершается процесс калибровки модели движения основного производственного капитала (61) и можно приступить к решению дифференциальных уравнений (55) и (57), описывающих трендовую траекторию и циклические колебания выпуска, поскольку уже полностью установлены численные значения параметров, определяющих правые части указанных уравнений. Выпишем конкретные значения всех параметров задачи:

$$\lambda=4; \quad \alpha=1; \quad \beta=0,18; \quad \nu_0=1; \quad \nu_1=1,05; \quad \psi = \frac{2}{11};$$

$$K_0=10,77 \text{ трлн.долл.}; \quad k_1=3,48; \quad \theta=0,09; \quad \omega_1=2; \quad \omega_2 = \frac{12}{11}; \quad q_1=0,051.; \quad q_2=0,063;$$

$$\mu_0=0,038; \quad \mu_1=1,13 \cdot 10^{-4}. \quad (68)$$

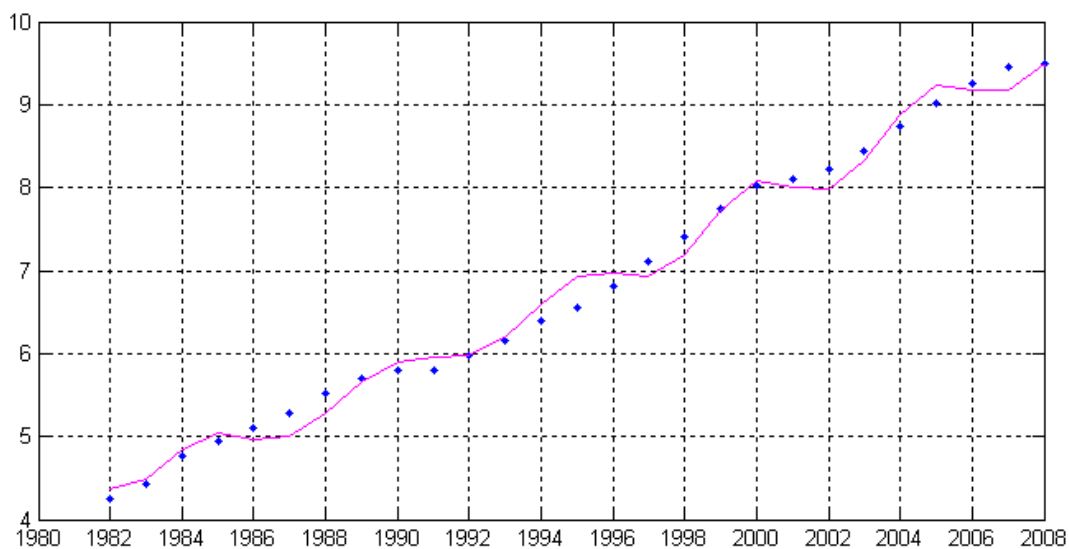


Рис. 23. Верификация модели с реальной экономикой на примере США
 (◆) - фактические данные; — расчетная кривая

На рис. 23 представлены результаты компьютерного моделирования макроэкономической динамики путем численного решения дифференциальных уравнений, описывающих трендовую траекторию экономического раз-

вития (55) и циклические колебания (57), при заданных значениях параметров (68), с последующей суперпозицией полученных решений. Сравнение фактической траектории движения ВВП США в период с 1983 по 2008 гг. с расчетной, полученной по предлагаемой математической модели и представленной на рис.23, показывает хорошее совпадение. Максимальное отклонение не превышает 7%. Крайне важно то обстоятельство, что модель улавливает и отражает кризисные рецессии 1990-1991гг. и 2000-2001гг. как это видно из рассмотрения рис.23. Следовательно математическая модель, учитывающая влияние циклических колебаний на формирование долговременной траектории экономического роста дает удовлетворительные результаты.

В заключение используем модель для прогнозирования динамики развития экономики США на период соответствующий продолжительности грядущего шестого кондратьевского цикла (2010-2050 гг.). Параметры модели довольно стабильны в долговременном периоде и поэтому их численные значения, полученные в процессе калибровки модели в период с 1983 по 2008 года, можно использовать в процессе прогнозирования. Поэтому достаточно определить начальный и конечный объемами основного производственного капитала K_0 и $K_0(1+k_1)$. В год оживления (2010 г.) в начале повышательной волны шестого кондратьевского цикла K_0 практически совпадает с объемом в предкризисный год, т.е. $K_{2018} \cong K_{2008}$. Для определения конечного объема основного производственного капитала воспользуемая следующими соображениями, вытекающими из анализа тенденций долговременного экономического развития.

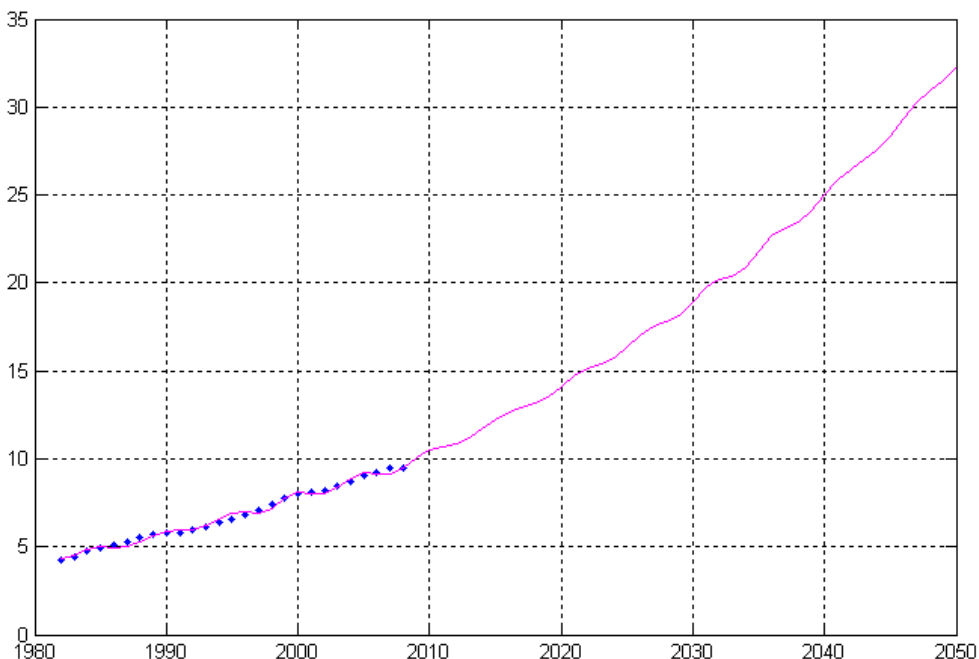


Рисунок 24. Прогноз динамики ВВП США до 2050 г.

В долговременном периоде наблюдается стабильная капиталоемкость (K/Y), что также выражается эмпирическим законом Калдора (Kaldor, 1961):

$K = c_k Y$ ($c_k = const$). М. Фридман в свое время показал, что в долговременном плане постоянное потребление прямо пропорционально перманентному доходу (Сакс, Ларрен, 1999): $C = c_y Y$. Следовательно $K \sim C$. Это значит, что если известен ожидаемый рост потребления, то легко определить и ожидаемый рост объема основного производственного капитала.

Р. Холл утверждает, что если ожидания потребителей рациональны, то потребление с течением времени следует траектории случайного блуждания (Hall, 1978). Это значит, что выход величины потребления (C) за пределы области $C^e \leq 3\sigma_c \sqrt{t}$ маловероятен (σ_c - среднеквадратическое отклонение C). Это следует из свойств гауссовских случайных блужданий, именуемых винеровским процессом (Артамонов, 2008). Таким образом, можно полагать, что $C_{\max}^e = 3\sigma_c \sqrt{T - T_0}$. Эта формула справедлива для $\ln \ln(T - T_0) > 0$, откуда вытекает, что $T - T_0 > e$. Поэтому можно принять $(C_{\max}^e)_0 = 3\sigma_c \sqrt{3}$. Тогда, для оценки роста потребления в период времени $T - T_0$ можно предложить следующую

простую формулу:

$$\frac{C_{\max}^e}{(C_{\max}^e)_0} = \sqrt{\frac{T - T_0}{3}} \quad (69)$$

Следовательно, $\frac{K_{\max}}{K_0} = \sqrt{\frac{T - T_0}{3}}$. (70)

Подставив $T=2050$ г. и $T_0=2010$ г. в формулу (70) получаем: $K_{\max} \cong 3,6K_0$. Поскольку $K_{\max} = K_0(1 + k_1)$, отсюда следует, что $k_1=2,6$. График движения ВВП США до 2050 г., рассчитанного по модели (55) и (57), представлен на рис.24. Видно, что экономический рост ожидается довольно устойчивый. К сожалению модель пока не описывает кризисную рецессию и последующую стадию депрессии. Для этого необходимо решать дифференциальное уравнение (57), в котором правая часть $F(t)$ будет стохастической функцией, т.е. решать стохастическое дифференциальное уравнение.

Выводы

1. Путем эндогенизации модели экономического роста Мэнкью-Ромера-Уэйла, с использованием долговременной стабильности капиталоемкости, получена весьма простая формула для долгосрочного прогнозирования динамики ВВП: $Y = \gamma AN$, где A - совокупная факторная производительность; N - численность населения; γ - постоянный множитель. Эта формула интересна тем, что она зависит только от численности населения, поскольку совокупная факторная производительность A (технический прогресс) также определяется численностью населения. Таким образом, демографическая динамика (N) играет ключевую роль в долговременном экономическом росте.

2. Предложено нелинейное дифференциальное уравнение демографической динамики, включающее функцию мгновенной емкости среды обитания зависящую от уровня технологического развития и определяемую ис-

ключительно демографическим императивом, с тремя запаздываниями: τ_1 - среднее время наступления репродуктивной способности; τ_2 - время диффузии базисных технологий; τ_3 - запаздывание реакции биосферы на антропогенную нагрузку. Благодаря введению временных запаздываний τ_1, τ_2 и τ_3 , новая математическая модель позволяет эффективно использовать эволюционную предысторию демографической динамики на протяжении около 100 лет и поэтому дает прекрасное совпадение с фактическими данными в ретроспективе. Модель является гибкой и позволяет моделировать различные сценарии развития народонаселения: рост с аperiодическим возвратом к стационарному уровню; рост и стабилизация вокруг стационарного уровня путем затухающих колебаний численности населения. С помощью численного интегрирования предложенного уравнения получены графики демографической динамики для мира в целом, а также для таких стран как Китай, Индия и Япония. Результаты моделирования показывают, что в мировой демографической динамике в ближайшие десятилетия произойдет бифуркация, т.е. разветвление сценариев развития в зависимости от степени разрешения экологических проблем: либо устойчивое развитие с асимптотической стабилизацией численности населения на максимальном уровне; либо рост с аperiодическим возвратом к стационарному уровню; либо рост с последующим колебательным затуханием вокруг стационарного уровня, определяемого несущей емкостью биосферы Земли. Китай, благодаря введению жесткого механизма контроля рождаемости, осуществит плавный аperiодический переход на стационарный уровень. А вот Индия, если там не будут предприняты аналогичные меры, скорее всего, столкнется с масштабным экологическим кризисом в середине XXI века. Вследствие этого начнется резкая убыль населения, численность которого впоследствии стабилизируется с большими издержками в затухающем колебательном режиме.

3. Предложено НИОКР-уравнение, исключющее влияние эффекта масштаба, которое позволяет получить достаточно точную функцию, описывающую динамику развития каждой страной собственных технологий. Совместно с известной логистической функцией, описывающей диффузию заимствованных технологий, первая позволяет рассчитывать долгосрочный прогноз динамики ВВП по эндогенной формуле данной в пункте 1. Предложенная методика расчета динамики результирующего технического прогресса позволяет оценить относительный вклад собственных и заимствованных технологий в любой момент времени. Например, для США наглядно показано, что до второй мировой войны заимствованные технологии играли большую роль нежели собственные. Но уже после войны, начиная с 1950-х годов США начинают генерировать мощную волну собственных технологий, которые уже активно заимствуют другие страны, в частности страны Западной Европы и Япония. На примере Японии мы видим, что в послевоенные годы она очень эффективно осуществляла заимствование технологий для обеспечения высоких темпов экономического роста вплоть до 1990-х годов, тогда как соб-

ственные технологические разработки Японии играли весьма скромную роль. Начиная с 1990-х годов Япония уже развивалась преимущественно за счет собственных технологических инноваций, которые однако способны обеспечивать только умеренные темпы экономического роста. Возможно в этом как раз и заключается основная причина стагнации японской экономики в последние десятилетия. Примерно та же картина наблюдается для Китая, которая динамично развивается с 1980-х годов путем активного заимствования технологий извне. Вместе с тем Китай сегодня успешно развивает и собственную технологическую базу, что свидетельствует о больших перспективах развития Китая в XXI веке.

4. Пользуясь уравнением демографической динамики и формулами для расчета динамики технического прогресса, рассчитаны динамика ВВП до 2100 г. как для мира в целом, так и для авангардных стран – США, Китая, Индии, Японии и Германии. Результаты показывают, что в ближайшее время по объему ВВП Китай опередит США, увеличив отрыв к 2050 г. более чем на 20 трлн. долл., а к 2100 г. почти на 50 трлн. долл. достигнув примерно 142 трлн. долл. США. ВВП Индии будет расти практически с такой же скоростью, как и ВВП Китая, но за счет более низкого объема ВВП в настоящее время, Индии не удастся обогнать Китай. Более того, к 2080 г. ВВП Индии замедлит рост, а в дальнейшем пойдет на спад из-за демографических проблем, связанных с экологическим кризисом. Развитые страны, в частности Япония и Германия, будут демонстрировать устойчивый рост ВВП. Сравнение полученных результатов с имеющимися прогнозами ВВП для указанных стран, полученными исследовательскими центрами OECD, а также крупнейших американских фирм Goldman Sachs и PricewaterhouseCoopers, показывает их достаточную близость друг к другу.

5. Дан вывод общего дифференциального уравнения, описывающего совместное взаимодействие долговременного экономического роста и циклических колебаний деловой активности. Уравнение содержит встроенный нелинейный акселератор инвестиций, поддерживающий в системе незатухающие колебания. Предложена схема приближенного решения полученного нелинейного уравнения макроэкономической динамики путем разделения быстроменяющихся циклических колебаний и медленноменяющейся трендовой траектории с помощью метода усреднения Крылова-Боголюбова-Митропольского.

Проведена верификация модели на примере экономического развития США на протяжении пятого большого Кондратьевского цикла (1983-2008 гг.), которая показала, что модель достаточно точно, как в количественном, так и в качественном аспектах, описывает реальный процесс экономического роста с учетом кратко- и среднесрочных циклов Китчина и Жюгляра. Максимальное отклонение расчетного значения ВВП от фактического не превышает 5%. Однако крайне важно то, что модель улавливает и отражает кризисные рецессии. Таким образом, модель позволяет выявить критические значения

структурных параметров, когда система теряет устойчивость и впадает в кризисную рецессию.

Модель использована для прогнозирования макроэкономической динамики США на период шестого Кондратьевского цикла (2018-2050 гг.) путем задания движения основного производственного капитала с учетом товарно-материальных запасов, порождающих циклы Китчина, и серии улучшающих инноваций, генерирующих циклы Жюгляра. Базисные темпы роста капитала были определены в соответствии с ожидаемыми темпами роста потребления.

Московский Государственный Университет (МГУ) им. М.В. Ломоносова

**Институт математических исследований сложных систем
им. И.Р. Пригожина**

Список литературы

- Акаев А.А., 2008.** Влияние деловых циклов на долговременный экономический рост // ДАН, том 421, №1, с.29-33.
- Акаев А.А., 2009.** Вывод общего уравнения макроэкономической динамики с нелинейным акселератором и анализ его решений/ Труды научного семинара МГУ «Время, хаос и математические проблемы», Вып.4. –М: КДУ, с.183-202.
- Акаев А.А., 2010 г.** К вопросу о фундаментальных пределах экономического роста и потребления// ДАН, том 434, №6, с.749-755.
- Акаев А.А., Садовничий В.А., 2010.** Математическая модель демографической динамики со стабилизацией численности населения мира вокруг стационарного уровня// ДАН, том 435, №3, с.317-321
- Акимов А.В., 2008.** 2300 год: глобальные проблемы и Россия. – М: Восточный университет.
- Аллен Р., 1963.** Математическая экономия. – М: Изд-во инстр. лит-ры.
- Артамонов Н.В., 2008.** Теория случайных процессов. – М: Изд-во «МГИМО-Университет».
- Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., 1974.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М: «Наука».
- Денисон Э., 1971.** Исследование различий в темпах экономического роста. – М: «Прогресс».
- Долгонос Б.М., 2009.** Нелинейная динамика экологических и гидрологических процессов. – М: Книжный дом «ЛИБРОКОМ».
- Капица С.П., 1992.** Математическая модель роста населения мира //Математическое моделирование, т.4, №6, с. 65-79.
- Капица С.П., 2008.** Очерк теории роста человечества. Демографическая революция и информационное общество. – М: Никитский клуб.

Коротаев А.В., Малков А.С., Халтурина Д.А. 2007. Законы истории: Математическое моделирование развития Мир-Системы. Демография, экономика, культура. – М: «КомКнига».

Прасолов А.В., 2008. Математические методы экономической динамики. – СПб: Изд-во «Лань».

Сакс Дж., Ларрен Ф., 1999. Макроэкономика. Глобальный подход. – М: Изд-во «Дело».

Сахал Д., 1985. Технический прогресс: концепции, модели, оценки. – М: «Финансы и статистика».

Столерю Л., 1974. Равновесие и экономический рост. – М: «Статистика».

Тинбэрхэн Я., Бос Х., 1967. Математические модели экономического роста. – М: «Прогресс».

Федотов А.П., 2002. Глобалистика: Начала науки о современном мире. – М: «Аспект Пресс».

Шараев Ю.В., 2006. Теория экономического роста. – М: Издательский дом ГУ ВШЭ.

Шумпетер Й., 1982. Теория экономического развития. – М: «Прогресс».

GGDC, <http://www.ggdc.net/databases/hna.htm>

Hall R.E., 1978. Stochastic Implications of the Life Cycle – Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence// Journal of Political Economy, vol.86, April, pp.971-987.

Hawkswarth J., 2006. The World in 2050: How big the major emerging market economies get and how can the OECD compete?/ PricewaterhouseCoopers, p.5.

Jones Ch.I., 1995. R&D-Based Models of Economic Growth// Journal of Political Economy, vol. 103, Issue 4, P.759-784.

Kaldor N., 1961. Capital Accumulation and Economic Growth / The Theory of Economic Growth. – New York: St. Martin's Press, P. 177-222.

Kremer M., 1993. Population Growth and Technological change: One Million B.C. to 1990 //The Quarterly Journal of Economics, vol. 108, №3, pp. 684-716.

Kydland F., Prescott E. 1982: Time to Build and Aggregate Fluctuations// *Econometrica*. vol.50, № 6. P.1345-1370.

Mankiw N., Romer D., Weil D., 1992. A Contribution to the Empirics of Economic Growth// *Quarterly Journal of Economics*, vol.107, №2.

OECD Factbook 2007. P.: OECD, 2007, Real GDP Growth.

Solow R. 1956: A Contribution to the Theory of Economic Growth// *Quarterly Journal of Economics*, vol. 70, February. P. 65-94.

Wilson D., Parashothaman R., 2003. Dreaming with BRICs: The Path to 2050. – N.Y.: Goldman Sachs; Global Economics Paper, №99, p.9.

World Bank, 2010. World Development Indicators. URL: <http://databank.worldbank.org>