АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОТОКА СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

А.А. Акаев

(*Москва*)

Впервые делается попытка математической формализации теории деловых циклов Й. Шумпетера с использованием модели марковских случайных процессов размножения и гибели. Получены явные решения, описывающие динамику подъемов и спадов экономической активности, вызванных технологическими шоками. Показана устойчивость модели в условиях воздействия случайного числа случайных шоков предложения. Построены кривые циклических колебаний экономической активности.

В 1950-х годах были созданы изящные математические модели на основе взаимодействия мультипликатора-акселератора, которые легли в основу кейнсианской теории экономических циклов (Аллен, 1963, гл. 6, 7). В тот же период Р. Солоу разработал неоклассическую модель экономического роста (Solow, 1956), которая стала отправной точкой всех последующих исследований долгосрочного экономического развития.

Однако уже к середине 1970-х годов кейнсианский подход к анализу деловых циклов оказался нежизнеспособным, когда он столкнулся с новыми явлениями в экономике. Также выявилась ограниченность практического применения модели Солоу, что привело к многочисленным попыткам уточнить и расширить сферу ее применения (Туманова, Шагас, 2004, гл. 9, 10).

В 1980-х годах Ф. Кюдланд и Э. Прескотт заложили основы новой теории реальных экономических циклов (Kydland, Prescott, 1982) путем объединения стохастической динамической модели общего равновесия со стохастической версией неоклассической модели роста Солоу. Данный подход является альтернативным кейнсианскому; он не дает, подобно классическим кейнсианским теориям, явных аналитических зависимостей, описывающих колебания экономической активности, и может быть реализован на практике исключительно с использованием численных методов. Благодаря тому, что модель Кюдланда и Прескотта более адекватно описывает процесс циклических колебаний в экономике, она стала основной в последующем макроэкономическом анализе путем компьютерного моделирования. За разработку нового подхода к численному моделированию циклов деловой активности и макроэкономической динамики вообще Ф. Кюдланд и Э. Прескотт были удостоены Нобелевской премии 2004 г. по экономике.

В тот же период Р. Нельсон и С. Уинтер разработали эволюционную теорию экономических изменений (Нельсон, Уинтер, 2002, гл. 2, 9) и построили эволюционные модели долгосрочного экономического роста, основанные на шумпетерианских описаниях конкуренции путем инноваций. Главное отличие эволюционной теории от ортодоксальных теорий, базирующихся на классических концепциях максимизации и равновесия, состоит в том, что в первой в полной мере учитывается тот факт, что шумпетерианская конкуренция протекает в условиях продолжительного неравновесия. Эволюционные модели создали лучший базис для численного моделирования экономического роста, обусловленного техническим прогрессом, чем неоклассическая модель Солоу и ее улучшенные варианты. Так же, как и стохастические динамические модели Кюдланда и Прескотта, они требуют мощной компьютерной поддержки.

В настоящей работе впервые делается попытка провести математическую формализацию теории экономических циклов Й. Шумпетера (Шумпетер, 1982, гл. 6) с использованием математической модели марковских случайных процессов размножения и гибели, что позволяет получить в явном виде аналитические зависимости, описывающие циклические колебания в экономике. Последние, в свою очередь, облегчают изучение вопросов как качественного, так и количественного анализа динамики выпуска и ее устойчивости. Необходимо отметить, что теория циклов Шумпетера и сегодня остается одной из наиболее привлекательных и адекватно отражающих природу циклических колебаний. Циклы у Шумпетера рассматриваются как отклонения от состояния равновесия, «как серьезные нарушения экономического кругооборота, без которых не было бы вообще экономического роста».

Итак, для описания делового цикла в качестве экономической модели берется модель, вытекающая из теории экономических циклов Й. Шумпетера, который полагал, что единственной причиной подъема служит массовое появление предпринимателей, создающих инновационную продукцию путем новых комбинаций имеющихся ресурсов и производительных сил. Предприятия, на которых производится новая продукция, также появляются массово и, в свою очередь, порождают большую покупательную силу, а тем самым и характерный для периодов подъема рост цен, закупая оборудование, сырье, привлекая рабочую силу, повышая зарплату и т.д. Они конкурируют со старыми предприятиями и на их успех также влияет ухудшение положения старых предприятий, часть которых приспосабливается к новым конкурентным условиям, а часть перестает производить и погибает. Это означает, что параллельно с массовым появлением новых предприятий идет процесс банкротства и гибели старых, а также части новых предприятий.

Почему экономика развивается не плавно, а рывками, почему за поступательным движением следует возвратное и лишь после него вновь возобновляется поступательное движение? «Это происходит исключительно потому, – утверждает Шумпетер, – что новые комбинации возникают не через равные промежутки времени – как это следовало бы ожидать согласно общим принципам вероятности. Как правило – новые комбинации появляются в большом числе».

Если в отрасли, где начинается подъем и появляются новые предприниматели, под влиянием их успеха возникает достаточно много новых предприятий, то они, работая на полную мощность, станут производить такое количество продукции, которое, в результате понижения цен и роста издержек, кладет начало ограничению предпринимательской прибыли. С достижением этого рубежа перестает действовать фактор, стимулирующий подъем, происходит сокращение инвестиций, ослабление предпринимательской деятельности и как следствие – падение производства, после чего наступает застой. Таким образом, подъем сам по себе создает объективную ситуацию, которая означает его завершение и неизбежно ведет к спаду производства, а затем к депрессии, а через нее – к состоянию временного относительного равновесия и отсутствия развития. Процессы, происходящие в период депрессии, являют собой картину неуверенности и беспорядочной активности, которая характерна для поиска согласования интересов, но уже на новом уровне. Производство дальше не сокращается, но и не растет. Однако товарные излишки постепенно рассасываются. Каждый раз, когда происходит приближение к состоянию равновесия и отсутствия развития, которое, если оно относительно сбалансировано, может опять стать отправной точкой для осуществления новых комбинаций и нового развития, в отдельных отраслях народного хозяйства появляются «точки роста», и происходит переход к оживлению. Новые предприниматели–инноваторы создают в этих точках роста новые предприятия, которые начинают выпуск принципиально новой продукции. Так начинается новый подъем, а вместе с ним и новый деловой цикл. Это будет именно новое развитие, в новой отрасли и в новых условиях.

Под «развитием» Шумпетер понимает лишь такие изменения хозяйственного кругооборота, которые экономика сама порождает, т.е. только случайные изменения «предоставленного самому себе», а не приводимого в движение импульсами извне народного хозяйства. Они представляет собой изменение траектории, по которой осуществляется кругооборот; смещение состояния равновесия, стихийно возникшее в экономике.

Таким образом, в соответствии со взглядами Шумпетера, экономическое развитие порождается причинами случайной природы. В основе механизма, объясняющего циклические колебания, также лежит вероятностный принцип: неожиданное появление «роев» предпринимателей–инноваторов хорошо описывается стохастическими потоками событий. Ранее мною было показано, что процесс рождения, выживания и гибели новой популяции предпринимателей (предприятий) можно рассматривать как пуассоновский поток событий (Akaev, 2001, ch. 4). Допущения о пуассоновском характере потока событий размножения и гибели предприятий ценны тем, что позволяют на практике применить мощный математический аппарат марковских процессов размножения и гибели к анализу экономических циклов.

Формализуем описанные выше модели циклов колебаний по Шумпетеру с использованием марковских процессов размножения и гибели с непрерывным временем. Пуассоновские потоки событий, ведущие к созданию (приращениям) новых предприятий, будем называть потоками размножения, а потоки событий, ведущие к выживанию, временному уходу с рынка или прекращению существования старых предприятий – потоками гибели.

Допустим, что интенсивность потока размножения определяется функцией $\lambda(t)$. В книге (Akaev, 2001, p. 114) было показано, что интенсивность потока размножения новых предприятий достаточно хорошо описывается законом Эрланга второго порядка:

$$\lambda(t) = \lambda_0^2 t\, \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}, \quad t > 0\,. \tag{1}$$

Это означает, что каждое второе новое предприятие выживает, адаптируется к новым условиям и становится конкурентоспособным. Из каких соображений определяется конкретное значение λ_0? Максимальная плотность появления на рынке новых предприятий наступает в момент времени $t^* = \lambda_0^{-1}$ (лет). Если принять, что этот максимум достигается в первый год, тогда $\lambda_0 = 1$.

Перейдем к установлению закона распределения и характеристик случайного процесса $X(t)$, представляющего собой число однородных инновационных (т.е. новых) предприятий, действующих на рынке. В теории марковских случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем предполагается, что переходы из одного состояния в другое происходят под воздействием пуассоновских потоков событий. Для анализа марковских случайных процессов такого класса А.Н. Колмогоров предложил систему дифференциальных уравнений, которые сегодня известны как «уравнения Колмогорова» (Вентцель, Овчаров, 2003, гл. 4). Замечательно, что эти уравнения позволяют определить не только закон распределения случайного процесса, но и его характеристики.

Пусть $\lambda(t)$ – интенсивность пуассоновского потока размножения новых предприятий, $\mu(t)$ – интенсивность пуассоновского потока гибели предприятий, тогда дифференциальное уравнение Колмогорова для определения функции математического ожидания $m_x(t)$ случайного процесса $X(t)$ имеет вид (Вентцель, Овчаров, 2003, гл. 4):

$$dm_x(t)/dt = \lambda(t) - \mu(t)m_x(t), \quad t > 0, \tag{2}$$

а общее решение данного уравнения определяется по формуле:

$$m_x(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^t \mu(\theta)d\theta}\left[\int_0^t \lambda(\tau)\,\mathrm{e}^{-\int_0^\tau \mu(\theta)d\theta}\,d\tau + m_x(0)\right]. \tag{3}$$

Для простоты дальнейшего изложения положим $\mu(\theta) = \mu_0 = \mathrm{const}$ (это наиболее часто встречающийся случай в практических приложениях), а также учтем, что имеет место нулевое начальное условие, т.е. $m_x(0) = 0$. Тогда (3) примет вид:

$$m_x(t) = \mathrm{e}^{-\mu_0 t}\int_0^t \lambda(\tau)\,\mathrm{e}^{\mu_0\tau}\,d\tau\,. \tag{4}$$

Подставляя в (4) выражение (1) и интегрируя это выражение, получаем функцию, описывающую математическое ожидание случайного процесса $X(t)$ – число новых предприятий, действующих на рынке в любой момент времени $t > 0$:

$$m_x(t) = \left(\lambda_0/\left(\lambda_0 - \mu_0\right)\right)^2\left[\mathrm{e}^{-\mu_0 t} - \mathrm{e}^{-\lambda_0 t} - \left(\lambda_0 - \mu_0\right)t\,\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\right]. \tag{5}$$

Графики функций $\lambda(t)$ и $m_x(t)$ показаны на рис. 1.

Каждое новое производственное предприятие выпускает η единиц инновационной продукции. Обозначим через $Y(t)$ случайный процесс, представляющий собой поток новой продукции этих предприятий. В общем случае это – поток потребительских благ нового качества. Будем полагать при этом, что средняя интенсивность выпуска процесса $Y(t)$ одинакова для всех единиц процесса $X(t)$ и равна $\lambda_Y(t)$, причем ограничений на общее число состояний $Y(t)$ нет. В этом случае безусловная интенсивность потока размножения определяется по формуле (Вентцель, Овчаров, 2003, гл. 6.2):

$$\lambda_Y(t) = \eta(t)m_x(t)\,, \tag{6}$$

а суммарный поток выпуска $Y(t)$ практически уже при $m_x(t) > 5$ является пуассоновским. Полагая в (6) $\eta(t) = \eta_0 = \mathrm{const}$ и подставляя $m_x(t)$ из (5) получаем:

$$\lambda_Y(t) = \eta\left[\mathrm{e}^{-\mu_0 t} - \mathrm{e}^{-\lambda_0 t} - (\lambda_0 - \mu_0)\, t\, \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\right], \quad \eta = \eta_0\big(\lambda_0 / (\lambda_0 - \mu_0)\big)^2 . \tag{7}$$

Пусть далее весь произведенный выпуск реализуется с интенсивностью $v(t)$, которую также примем постоянной $\nu = \nu_0 = \mathrm{const}$, что характеризует процесс как затухающий. Следовательно, для случайного процесса выпуска и реализации новой продукции $Y(t)$ также справедливо уравнение Колмогорова, подобное (2), и соответствующее решение, подобное (4) с $\lambda_Y(t)$, определяемым из (7). Это решение запишется в виде:

$$\begin{gathered} m_Y(t) = \eta\, \mathrm{e}^{-\nu_0 t}\left\{\int_0^t \left[\mathrm{e}^{-\mu_0 \tau} - \mathrm{e}^{-\lambda_0 \tau} - (\lambda_0 - \mu_0)\,\tau\, \mathrm{e}^{-\lambda_0 \tau}\right]\mathrm{e}^{\nu_0 \tau}\, d\tau\right\} = \\ = \eta\left[\frac{1}{\lambda_0 - \mu_0}\left(\mathrm{e}^{-\mu_0 t} - \mathrm{e}^{-\nu_0 t}\right) - \frac{2\lambda_0 - \nu_0 - \mu_0}{(\lambda_0 - \nu_0)^2}\left(\mathrm{e}^{-\nu_0 t} - \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\right) + \frac{(\lambda_0 - \mu_0)}{(\lambda_0 - \nu_0)}\, t\, \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\right]. \end{gathered} \tag{8}$$

Если $\nu_0 = \mu_0$ или $\lambda_0 = \nu_0$, то в формуле (8) возникают неопределенности типа $\left(\frac{0}{0}\right)$, которые легко раскрываются с помощью правила Лопиталя. В случае, когда $\nu_0 = \mu_0$ имеем:

$$m_Y(t) = \eta\left[t\left(\mathrm{e}^{-\mu_0 t} - \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\right) - \frac{2}{\lambda_0 - \nu_0}\left(\mathrm{e}^{-\nu_0 t} - \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\right)\right], \tag{8а}$$

а если $\lambda_0 = \nu_0$, тогда

$$m_Y(t) = \eta\left[\frac{1}{\lambda_0 - \mu_0}\left(\mathrm{e}^{-\mu_0 t} - \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\right) - t\,\mathrm{e}^{-\lambda_0 t} - 0.5(\lambda_0 - \mu_0)\, t^2\, \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\right]. \tag{8б}$$

На рис. 2 представлены графики функции $m_Y(t)$, являющейся математическим ожиданием выпуска – реализации продукции при различных значениях ν_0, т.е. при различных интенсивностях реализации продукции. Назовем эти кривые «инновационными волнами Шумпетера», поскольку они включают фазы подъема, спада и непосредственно следуют из модели Шумпетера.

Предложенная модель удобна для изучения влияния различных шоков, поскольку дает явные аналитические решения, возмущенные в результате действия шоковых импульсов. Рассмотрим влияние шоков предложения. Для этого в формуле (6) положим

$$\eta(t) = \eta_0\left[1 + \varepsilon_\eta \delta\left(t - t_0\right)\right], \tag{9}$$

где $\delta\left(t - t_0\right)$ – дельта-функция Дирака, означающая появление в момент времени $t = t_0$ шокового импульса со стороны предложения (например, в результате мгновенного скачка цен); ε_η – постоянный коэффициент, характеризующий величину этого импульса. Подставляя $\eta(t)$ в виде (9) в (6), а затем, решая соответствующее уравнение Колмогорова типа (2), получаем:

$$\begin{aligned} m_{\hat{Y}}(t) = \eta\Bigg\{ & \frac{e^{-\mu_0 t} - e^{-\nu_0 t}}{\lambda_0 - \mu_0} - \frac{2\lambda_0 - \nu_0 - \mu_0}{\left(\lambda_0 - \nu_0\right)^2}\left(e^{-\nu_0 t} - e^{-\lambda_0 t}\right) + \frac{\lambda_0 - \mu_0}{\lambda_0 - \nu_0} t\, e^{-\lambda_0 t} + \\ & + 1(t - t_0)\varepsilon_\eta\left[e^{-\mu_0 t_0} - e^{-\lambda_0 t_0} - \left(\lambda_0 - \mu_0\right) t_0\, e^{-\lambda_0 t_0}\right] e^{-\nu_0 (t - t_0)} \Bigg\}, \end{aligned} \tag{10}$$

где $1(t - t_0)$ – единичная функция, равная единице при $t \geq t_0$ и нулю при $t < t_0$. Графики возмущенного решения модели $m_Y(t)$ представлены на рис. 3. Возмущенные кривые ясно демонстрируют сглаживающий эффект модели, сводящий возникающие импульсы предложения на нет.

Можно также рассмотреть влияние шоковых импульсов со стороны процесса гибели:

$$\nu = \nu_0\left[1 - \varepsilon_\nu \delta(t - t_0)\right].$$

Интересно, что при этом первоначальное решение (8) остается в неизменном виде, т.е. модель не реагирует на шоки со стороны процесса гибели. Все это свидетельствует об устойчивости модели в отношении эндогенных шоков как следствие устойчивости механизмов определяющих циклические колебания в самой теории Шумпетера.

Известно (см. (Вентцель, Овчаров, 2003, гл. 5.4, 6.2)), что сам закон распределения случайного процесса $Y(t)$, как при постоянных, так и при переменных интенсивностях $\lambda_Y(t)$ и $\nu(t)$, является законом Пуассона с полученной выше функцией математического ожидания, т.е. $m_Y(t) = D_Y(t)$; $\quad p_n = \left[m_Y(t)\right]^n e^{-m_Y(t)}/n!$, где $D_Y(t)$ – дисперсия; $p_n = P\left\{Y(t) = n\right\}$, $n = 1, \ldots, k, \ldots$, – ряд распределения. При достаточно большом значении $m_Y(t)$ ($m_Y(t)$>20) закон распределения случайного процесса $Y(t)$ можно приближенно считать нормальным с параметрами $m_Y(t)$ и $D_Y(t)$.

Это обстоятельство позволяет легко рассчитывать прогнозные оценки наиболее вероятного объема выпуска в интересующий момент времени $t = t_1$ или вероятный объем выпуска в период времени с t_1 до t_2 и так далее. Например, вероятность превышения объема выпуска в момент времени $t = t_2$ заданного порогового значения N может быть найдена по формуле $P\{Y(t_2) > N\} = 0.5 - \Phi\left\{\left(N - m_Y(t_2)\right) / \sqrt{m_Y(t_2)}\right\}$, где $\Phi(x) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1} \int_0^x \mathrm{e}^{-0.5t^2}\, dt$ – функция Лапласа или «интеграл вероятностей» (Вентцель, Овчаров, 2003, гл. 6.3), для которой имеются обширные таблицы численных значений.

Используя правило «трех сигм», можно заключить, что возможные значения числа единиц выпуска продукции будут находиться в пределах $m_Y(t) \pm 3\sqrt{D_Y(t)} = m_Y(t) \pm 3\sqrt{m_Y(t)}$. Отсюда вытекает, что при малых объемах производства и недостаточном спросе экономическая конъюнктура нестабильна и подвержена случайным воздействиям (поскольку дисперсия равна математическому ожиданию) и только при широкомасштабном производстве достигается устойчивость, поскольку $\pm 3\sqrt{m_Y(t)}$ становится относительно малым в сравнении с математическим ожиданием $m_Y(t)$.

А теперь вернемся к главному вопросу: как с помощью данной модели описать циклические колебания в экономике? Для этого необходимо образовать суперпозицию случайных процессов размножения и гибели $Y_i(t - t_i)$, которые порождаются технологическими шоками в случайные моменты времени t_i:

$$\tilde{Y}(t) = \sum_{i=0}^{n} Y_i(t - t_i) 1(t - t_i), \qquad (11)$$

где $1(t - t_i)$ – единичная функция. Наиболее подходящей функцией распределения для выбора случайных моментов времени t_i, характеризующих начало очередного инновационного толчка, может служить показательное распределение $f(t) = \xi \mathrm{e}^{-\xi t}$, $t > 0$, для которого $m_t = 1/\xi$, $D_t = 1/\xi^2$. Причем этот закон описывает интервал времени T_i между двумя соседними значениями t_i, t_{i+1}. Каждый процесс $Y_i(t-t_i)$ имеет свои конкретные параметры $\lambda_i, \mu_i, \nu_i, \eta_i$, обусловленные характером технологических инноваций, вызвавших соответствующий цикл.

Для практических приложений от суперпозиции случайных функций (11) необходимо перейти к суперпозиции соответствующих математических ожиданий:

$$m_{\tilde{Y}}(t) = \sum_{i=0}^{n} m_Y^{(i)}(t-t_i) 1(t-t_i) .$$

Здесь $m_Y^{(i)}(t-t_i)$ – легко получается из (8). В итоге приходим к формуле, которая описывает кривую циклических колебаний в экономике:

$$m_{\tilde{Y}}(t) = \sum_{i-0}^{n} \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i - \mu_i} \right)^2 \left\{ \frac{e^{-\mu_i (t-t_i)} - e^{-\nu_i (t-t_i)}}{\nu_i - \mu_i} - \right.$$
$$\left. - \frac{2\lambda_i - \nu_i - \mu_i}{(\lambda_i - \nu_i)^2} \left[e^{-\nu_i (t-t_i)} - e^{-\lambda_i (t-t_i)} \right] + \frac{\lambda_i - \mu_i}{\lambda_i - \nu_i} (t-t_i) e^{-\lambda_i (t-t_i)} \right\} 1(t-t_i). \quad (12)$$

На рис. 4а представлена кривая $m_{\tilde{Y}}(t)$, полученная путем суперпозиции четырех инновационных волн Шумпетера с постоянным интервалом времени между ними T_m = 7 лет. Данная кривая напоминает характерное для циклических колебаний волнообразное движение общего выпуска, постоянно повторяющееся и нерегулярное даже при постоянном T_m. Итак, циклические колебания в данной модели возникают как естественное следствие суперпозиции инновационных волн Шумпетера.

Если увеличить интервал времени между инновационными толчками, вызывающими подъем, то циклические колебания становятся более рельефными (рис. 4б, T_m = 10 лет), подъемы и спады – более глубокими, и происходит падение долгосрочных темпов роста выпуска.

Если предельно уменьшить интервал времени между инновационными толчками (до 4–5 лет), тогда получаем циклические колебания с незначительной амплитудой (на рис. 4в T_m = 5 лет). Причем темп долгосрочного роста резко увеличивается, а сам рост становится более равномерным. Отсюда напрашивается вывод о том, что экономическая политика государства должна быть направлена на максимальное благоприятствование развитию предпринимательства, малых и средних предприятий, восприимчивых к практической реализации технологических новшеств и инноваций.

Кривая долгосрочного устойчивого развития, представленная на рис.4в, напоминает динамику экономического развития Китая в последние 25–30 лет, где происходила непрерывная инновационная деятельность во всех сферах жизни общества, и через каждые 4–5 лет начиналась широкомасштабная технологическая модернизация очередной базовой отрасли или группы отраслей экономики. Подобный процесс был назван «эффектом скорости». Его суть состоит в том, что при ускорении технического прогресса, а так же изменений в отраслевой структуре производства и организации экономики возникает эффект долговременного роста. Именно этим «эффект скорости» отличается от хорошо известного «эффекта уровня» под которым понимается рост от вложения инвестиций при неизменных условиях технологического прогресса и структуры производства. Но этот эффект имеет, как правило, кратковременный характер и оказывает влияние непродолжительное время. Таким образом, для долговременного экономического роста отдельной страны главную роль играют «эффекты скорости». «Устойчивый рост китайской экономики, – пишет Ху Аньчан, – в течение длительного времени после начала реформ как раз объясняется «эффектами скорости» (Ху Аньчан, 2005, с. 34–57).

Для выделения и описания кривой тренда, характеризующего долгосрочный экономический рост, возьмем производственную функцию Кобба–Дугласа в простейшем виде:

$$Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \text{ или } y = Y / L = \left(K / L\right)^{\alpha} = k^{\alpha}, \tag{13}$$

где K – затраты капитала, L – затраты труда, α – эластичность выпуска по капиталу, k – капиталовооруженность одного работника, y – производительность одного работника.

Уравнение инвестиций, характеризующее годовое изменение капитала, примет вид:

$$dk / dt = i(t) - \delta k(t), \tag{14}$$

где $i(t)=I(t)/L$ – движение инвестиций в расчете на одного работника, δ – норма выбытия капитала, а решение уравнения (14) –

$$k(t)=\mathrm{e}^{-\delta t}\left[\int_0^t i(\tau)\mathrm{e}^{\delta\tau}\,d\tau+k(0)\right]. \qquad (15)$$

Полагая, что инвестиции растут по линейному закону $i(t)=i_0+\gamma t$, подставим данное выражение в (15), и, проинтегрировав, получаем:

$$k(t)=\frac{\gamma}{\delta}t+\frac{1}{\delta}(i_0-\frac{\gamma}{\delta})+\left[k_0-\frac{1}{\delta}(i_0-\frac{\gamma}{\delta})\right]\mathrm{e}^{-\delta t}. \qquad (16)$$

Поскольку в модели Шумпетера речь идет о производственных инвестициях в новые предприятия, можно полагать $k_0 = 0$. Примем дополнительно, что $i_0 = \gamma/\delta$. При этих условиях получаем из (16) и (13)

$$k(t)=\gamma t/\delta; \quad y=(\gamma/\delta)^{\alpha}t^{\alpha}=At^{\alpha}, \quad A=(\gamma/\delta)^{\alpha}. \qquad (17)$$

Последнее выражение и есть функция, описывающая кривую тренда.

Определяя постоянные параметры A и α в (17) методом наименьших квадратов и исходя из критерия $\int_{t_1}^{t_2}(\tilde{y}-y)^2\,dt=\min$, где $\tilde{y}=m_{\tilde{Y}}$ из (12), получаем для рассмотренных выше случаев T_m= 5, 7 и 10 лет следующие значения A и α:

а) T_m = 5 лет; A_1= 4.45; α_1= 0.57;

б) T_m = 7 лет; A_2= 5.18; α_2 = 0.38;

в) T_m = 10 лет; A_3= 5.19; α_3 = 0.25.

Кривые тренда, описываемые производственной функцией (17) при данных значениях параметров A и α, представлены на рис. 4 (а, б, в). Наблюдается согласование между кривыми циклических колебаний и трендом. Таким образом, получает подтверждение широко известная гипотеза о том, что циклы – это колебания, происходящие вокруг трендовой траектории экономического роста, причем они происходят независимо от последнего. Замечательно, что кривая тренда, как и предполагалось, описывается обычной производственной функцией Кобба–Дугласа.

Вернемся к вопросу об устойчивости модели и рассмотрим общий случай возмущающего влияния серии случайных шоков предложения, поскольку чрезвычайно важной является стабильность роста. Доходы бедных гораздо чувствительнее к цикличным явлениям и кризисам, особенно потому, что бедные не располагают достаточными сбережениями, которые позволили бы выровнять потребление в трудные периоды. Поэтому стабильные темпы роста представляются более предпочтительными по сравнению с ростом, который имеет «рваный» ритм, когда рост нестабилен и неустойчив. Предприятия в подобных ситуациях бывают мало расположены к инвестициям и развитию производства.

Запишем возмущенное решение модели $m_{\hat{Y}}(t)$ (10) в упрощенном виде:

$$m_{\hat{Y}}(t) = m_Y(t) + 1(t - t_0)\eta_0 \varepsilon_{\eta 0} m_{x0}\, \mathrm{e}^{-\nu_0 (t - t_0)}, \tag{18}$$

где $m_{x0} = \left(\lambda_0 / (\lambda_0 - \mu_0)\right)^2 \left[\mathrm{e}^{-\mu_0 t_0} - \mathrm{e}^{-\lambda_0 t_0} - (\lambda_0 - \mu_0) t_0\, \mathrm{e}^{-\lambda_0 t_0}\right]$. Здесь первый член совпадает с основным невозмущенным решением модели (8), а дополнительный второй член, описывающий вклад шока предложения в суммарный выпуск, убывает с экспоненциальной скоростью, что характеризует устойчивость модели по отношению к единичным шоковым воздействиям. Необходимо выяснить, как обстоит дело в общем случае, когда имеет место серия случайных шоковых воздействий.

Для дальнейшего анализа рассмотрим влияние шока предложения, возникшего в случайный момент времени t_i. Возмущенное решение модели можно по аналогии с (18) записать в виде:

$$m_{\hat{Y}i}(t) = m_Y(t) + 1(t - t_i)\eta_0 \varepsilon_{\eta i} m_{xi}\, \mathrm{e}^{-\nu_0 (t - t_i)}. \tag{19}$$

Разумеется, $\varepsilon_{\eta i}$ может быть как положительной, так и отрицательной величиной, т.е. шок предложения может быть как положительным, так и отрицательным, а самое главное – случайным по величине. Введем случайную величину $\bar{\varepsilon}_{\eta i} = \varepsilon_{\eta i} m_{xi}$. Положим, что $\bar{\varepsilon}_{\eta i}$ – случайная величина, имеющая заданные числовые характеристики:

$$M\left[\bar{\varepsilon}_{\eta i}\right] = m_{\bar{\varepsilon}}; \quad D\left[\bar{\varepsilon}_{\eta i}\right] = D_{\bar{\varepsilon}}. \tag{20}$$

Наиболее подходящим законом распределения для случайной величины $\varepsilon_{\eta i}$ можно считать смещенный закон Лапласа: $f(y) = 0.5\psi\, \mathrm{e}^{-\psi|y - m_\varepsilon|}$ с математическим ожиданием m_ε и дисперсией $D_\varepsilon = 2/\psi^2$. Следовательно, $m_{\bar{\varepsilon}} = m_\varepsilon m_{xi}$; $D_{\bar{\varepsilon}} = 2m_{xi}^2/\psi^2$.

Положим, что к моменту времени $t > 0$ произошло случайное число (Z) шоков предложения, распределенное по закону Пуассона с параметром χt. Тогда выражение (9) для интенсивности выпуска каждого предприятия запишется в виде:

$$\eta(t) = \eta_0 \left[1 + \sum\nolimits_{i=1}^{Z} \varepsilon_{\eta i} \delta(t - t_i) \right], \quad t > t_i > 0 . \tag{21}$$

Подставив (21) в (6), получаем выражение для интенсивности суммарного потока выпуска продукции $\lambda_{\hat{Y}}(t)$, которое в свою очередь, подставляем в соответствующее решение уравнения Колмогорова, подобное (4), и, интегрируя его, получаем:

$$\hat{Y}(t) = m_Y(t) + \eta_0 \sum\nolimits_{i=1}^{Z} 1(t - t_i) \overline{\varepsilon}_{\eta i}\, \mathrm{e}^{-\nu_0 (t - t_i)} . \tag{22}$$

Известно, что пуассоновский поток событий на интервале (0, t) можно с достаточной точностью представить как совокупность точек на этом интервале, координата каждой $\theta_i \in (0, t)$ распределена равномерно в этом интервале и не зависит от координат других точек. В связи с этим выражение (22) можно записать в следующем виде, опуская единичные функции:

$$\hat{Y}(t) = m_Y(t) + \eta_0 \sum\nolimits_{i=1}^{Z} \overline{\varepsilon}_{\eta i}\, \mathrm{e}^{-\nu_0 (t - \theta_i)} . \tag{23}$$

Здесь: $t > 0$, $0 < \theta_i < t$. Случайные величины Z, θ_i и $\varepsilon_{\eta i}$ взаимно независимы. Если ввести обозначения $X_i = \overline{\varepsilon}_{\eta i}\, \mathrm{e}^{-\nu_0 (t - \theta_i)} = X_{1i} X_{2i}$, где $X_{1i} = \overline{\varepsilon}_{\eta i}$ и $X_{2i} = \mathrm{e}^{-\nu_0 (t - \theta_i)}$, тогда (23) примет наиболее простой вид:

$$\hat{Y}(t) = m_Y(t) + \eta_0 \sum\nolimits_{i=1}^{Z} X_i , \tag{24}$$

где X_i и X_j – взаимно независимы.

Числовые характеристики суммы случайного числа одинаково распределенных и некоррелированных (взаимно-независимых) случайных слагаемых X_i определяются простыми формулами (Вентцель, Овчаров, 2003, гл. 8.5):

$$\begin{gathered} M\left[\sum\nolimits_{i=1}^{Z} X_i \right] = M[Z] M[X_i] = m_Z m_X ; \\ m_X = M[X_i] = M[X_{1i}] M[X_{2i}] ; \\ D\left[\sum\nolimits_{i=1}^{Z} X_i \right] = m_X^2 D_Z + m_Z D_X . \end{gathered} \tag{25}$$

Вычисляя математическое ожидание $\hat{Y}(t)$ по формуле (24) с помощью (25) получаем:

$$M\left[\hat{Y}(t)\right] = m_Y(t) + \eta_0 M\left[Z\right] M\left[\overline{\varepsilon}_{\eta i}\right] M\left[\mathrm{e}^{-\nu_0(t-\theta_i)}\right]. \tag{26}$$

Поскольку случайная величина Z имеет пуассоновское распределение с параметром χt, то $M[Z]=\chi t$, а $M\left[\overline{\varepsilon}_{\eta i}\right] = m_{\overline{\varepsilon}}$ (см. (20)). Выше было указано, что θ_i равномерно распределена в интервале (0, t), отсюда следует, что

$$M\left[\mathrm{e}^{-\nu_0(t-\theta_i)}\right] = \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{e}^{-\nu_0(t-\theta_i)} d\theta_i = \left(1-\mathrm{e}^{-\nu_0 t}\right)/\nu_0 t.$$

Подставляя конкретные выражения для отдельных математических ожиданий в (26) получаем окончательное выражение для математического ожидания $\hat{Y}(t)$:

$$m_{\hat{Y}}(t) = m_Y(t) + \left(\eta_0\chi/\nu_0\right) m_{\overline{\varepsilon}}(1-\mathrm{e}^{-\nu_0 t}). \tag{27}$$

Выведем формулу для дисперсии, применяя (25) к случайной функции (24), получаем:

$$\begin{aligned} D\left[\hat{Y}(t)\right] &= \eta_0^2 D\left[\sum_{i=1}^{Z} \overline{\varepsilon}_{\eta i}\,\mathrm{e}^{-\nu_0(t-\theta_i)}\right] = \eta_0^2\left\{M[Z]D\left[\overline{\varepsilon}_{\eta i}\,\mathrm{e}^{-\nu_0(t-\theta_i)}\right] + \right. \\ &\left. + D[Z]\left(M\left[\overline{\varepsilon}_{\eta i}\,\mathrm{e}^{-\nu_0(t-\theta_i)}\right]\right)^2\right\} = \eta_0^2\chi t\left\{D\left[\overline{\varepsilon}_{\eta i}\,\mathrm{e}^{-\nu_0(t-\theta_i)}\right] + \left(M\left[\overline{\varepsilon}_{\eta i}\,\mathrm{e}^{-\nu_0(t-\theta_i)}\right]\right)^2\right\}. \end{aligned} \tag{28}$$

Здесь учтено, что $M[Z]=D[Z]=\chi t$. Дисперсия произведения двух независимых случайных величин X_1 и X_2 выражается формулой $D\left[X_1 X_2\right] = D_1 D_2 + D_1 m_2^2 + D_2 m_1^2$ (см. (Вентцель, Овчаров, 2003, с. 249)). Согласно данной формуле, преобразуем (28) к следующему виду:

$$D\left[\hat{Y}(t)\right] = \eta_0^2\chi t\left\{D_{\overline{\varepsilon}} D\left[\mathrm{e}^{-\nu_0(t-\theta_i)}\right] + D_{\overline{\varepsilon}}\left(M\left[\mathrm{e}^{-\nu_0(t-\theta_i)}\right]\right)^2 + m_{\overline{\varepsilon}}^2 D\left[\mathrm{e}^{-\nu_0(t-\theta_i)}\right] + m_{\overline{\varepsilon}}^2\left(M\left[\mathrm{e}^{-\nu_0(t-\theta_i)}\right]\right)^2\right\}. \tag{29}$$

Для вычисления $D\left[\mathrm{e}^{-\nu_0(t-\theta_i)}\right]$ воспользуемся широко применяемой формулой, выражающей дисперсию случайной величины X_1 через ее второй начальный момент:

$$D\left[X_1\right] = M\left[X_1^2\right] - \left(M\left[X_1\right]\right)^2,$$

отсюда получаем:

$$D\left[\mathrm{e}^{-\nu_0(t-\theta_i)}\right] = M\left[\mathrm{e}^{-\nu_0(t-\theta_i)}\right] - \left(M\left[\mathrm{e}^{-\nu_0(t-\theta_i)}\right]\right)^2. \tag{30}$$

Подставляя (30) в (29) и сокращая подобные члены, получаем окончательное выражение для дисперсии:

$$D_{\hat{Y}} = \eta_0^2 \chi \left(D_{\overline{\varepsilon}} + m_{\overline{\varepsilon}}^2 \right) \left(1 - \mathrm{e}^{-2\nu_0 t} \right) / 2\nu_0 . \qquad (31)$$

Возможный диапазон суммарного выпуска, в случае серии случайных шоков предложения, можно найти по правилу «трех сигм»:

$$m_{\hat{Y}}(t) \pm 3\sigma_{\hat{Y}} = m_Y(t) + \eta_0 \chi m_{\overline{\varepsilon}} \frac{1 - \mathrm{e}^{-\nu_0 t}}{\nu_0} \pm 3\eta_0 \sqrt{\left(D_{\overline{\varepsilon}} + m_{\overline{\varepsilon}}^2 \right) \chi \frac{1 - \mathrm{e}^{-2\nu_0 t}}{2\nu_0}}. \qquad (32)$$

Рассмотрим предельное поведение выпуска $\hat{Y}(t)$ при $t \to \infty$, т.е. поведение числовых характеристик (27) и (31):

$$\lim_{t \to \infty} m_{\hat{Y}}(t) = \frac{\eta_0}{\nu_0} \chi m_{\overline{\varepsilon}}; \quad \lim_{t \to \infty} D_{\hat{Y}}(t) = \frac{\eta_0^2 \chi}{2\nu_0} \left(D_{\overline{\varepsilon}} + m_{\overline{\varepsilon}}^2 \right).$$

Кроме того, можно показать, что корреляционная функция при $t \to \infty$ также есть функция сдвига между аргументами, т.е. функция одного аргумента. Поскольку математическое ожидание и дисперсия постоянны, случайный процесс $\hat{Y}(t)$ при $t \to \infty$ будет стационарным и эргодическим. Следовательно, модель устойчива и в общем случае, т.е. в отношении случайного числа случайных шоков предложения.

Итак, для стабилизации выпуска, для уменьшения диапазона разброса фактических значений выпуска (32), необходимо принять все меры по минимизации как дисперсии $D_{\overline{\varepsilon}}$, так и математического ожидания $m_{\overline{\varepsilon}}$ возможных шоков предложения, т.е. чтобы они обращали в минимум второй начальный момент:

$$\alpha_2 = D_{\overline{\varepsilon}} + m_{\overline{\varepsilon}}^2 \to \min .$$

Поскольку большинство шоков предложения возникает вследствие ценовых всплесков, необходимо, прежде всего, жестко контролировать инфляцию. Для устойчивого экономического развития необходима низкая инфляция и стабильная валюта.

Население предпочитает видеть стабильный, а не скачкообразный рост своих доходов, даже в том случае, если, в конечном счете, средний рост будет несколько меньшим по сравнению с тем, каким он мог бы быть при скачкообразном подъеме. Поэтому экономическая политика правительства должна быть направлена на то, чтобы обеспечить стабильный и устойчивый экономический подъем.

В заключение отметим, что установление связей параметров изложенной выше стохастической динамической модели с привычными параметрами, характеризующими потоки инвестиций, потребления, заработной платы и т.п., является отдельной и самостоятельной задачей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Аллен Р. (1963): Математическая экономия. М.: Изд-во иностран. лит.

Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. (2003): Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: ИЦ «Академия».

Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. (2003): Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: ИЦ «Академия».

Нельсон Р.Р., Уинтер С.Дж. (2002): Эволюционная теория экономических изменений. М.: Дело.

Туманова Е.А., Шагас Н.Л. (2004): Макроэкономика. Элементы продвинутого подхода. М.: ИНФРА-М.

Шумпетер Й. (1982): Теория экономического развития. М.: Прогресс.

Ху Аньчан (2005): Чем объясняются высокие темпы развития китайской экономики? // *Проблемы дальнего Востока*. № 1.

Akaev A. (2001): Kyrgyzstan: An Economy in Transition. Asia Pacific Press. Australian National University.

Kydland F., Prescott E. (1982): Time to Build and Aggregate Fluctuations // *Econometrica*. Vol. 50. № 6.

Solow R. (1956): A Contribution to the Theory of Economic Growth // *Quarterly J. of Economics.* February.

Поступила в редакцию

00.00.2006 г.

ANALYSIS OF ECONOMIC CYCLES USING THE MATHEMATICAL MODEL OF THE FLOW OF RANDOM EVENTS

A.A. Akayev

(*Moscow*)

The first attempt to give mathematic interpretation to the theory of business cycles was made by Y. Schumpeter using Markov's model of random processes related to reproduction and death. Evident solutions were received, as they describe the dynamics of development and recession of economic activities caused by technological shocks. The model's stability was shown when a random number of casual shocks influenced the proposal. Curves of cyclic variations of economic activities were built.